

**Antonella Greco (Coordinamento)
Andreina Anna D'Arpino, Rosangela Mapelli**

Elementi di algebra

E-Book di Matematica per il biennio

Volume 1



COPIA SAGGIO

**Campione gratuito fuori commercio
ad esclusivo uso dei docenti**

© Garamond 2009
Tutti i diritti riservati
Via Tevere, 21 Roma

Prima edizione
Volume 1

Cod. ISBN 978-88-86180-58-0

INDICE GENERALE

Sezione 1. Gli Insiemi Numerici	7
I Numeri Naturali	8
I numeri naturali.....	9
<i>Rappresentazione grafica</i>	<i>9</i>
Le quattro operazioni	10
<i>La differenza</i>	<i>11</i>
<i>La divisione.....</i>	<i>11</i>
<i>Proprietà delle operazioni.....</i>	<i>13</i>
<i>Le potenze</i>	<i>15</i>
<i>Proprietà delle potenze aventi ugual base.....</i>	<i>16</i>
<i>Proprietà delle potenze aventi ugual esponente</i>	<i>17</i>
Divisori e multipli di un numero	18
<i>Numeri Primi</i>	<i>19</i>
<i>Massimo Comun Divisore.....</i>	<i>20</i>
<i>Minimo Comune Multiplo</i>	<i>21</i>
Espressioni	22
<i>Ordine di precedenza</i>	<i>22</i>
<i>Il ruolo delle parentesi.....</i>	<i>23</i>
<i>L'uso delle parentesi</i>	<i>23</i>
I Numeri Razionali Assoluti	27
Introduzione	28
<i>Le frazioni nell'antichità.....</i>	<i>28</i>
<i>Tipi di frazione</i>	<i>29</i>
<i>Frazioni equivalenti.....</i>	<i>30</i>
<i>Riduzione ai minimi termini.....</i>	<i>31</i>
Operazioni con le frazioni.....	32
<i>Confronto tra frazioni</i>	<i>32</i>
<i>Addizione e Sottrazione tra frazioni</i>	<i>33</i>
<i>Moltiplicazione tra frazioni</i>	<i>33</i>
<i>Divisione tra due frazioni</i>	<i>34</i>
<i>Elevamento a potenza di una frazione.....</i>	<i>34</i>
<i>Espressioni con i numeri razionali assoluti</i>	<i>34</i>
I Numeri Razionali e i numeri decimali.....	35
<i>Dalle frazioni ai numeri decimali</i>	<i>35</i>
<i>Numeri decimali limitati.....</i>	<i>36</i>
<i>Numeri decimali periodici.....</i>	<i>36</i>
<i>Criteri per riconoscere un numero decimale.....</i>	<i>37</i>
<i>Le frazioni generatrici di numeri decimali.....</i>	<i>38</i>
Rapporti e proporzioni	39
<i>La produzione e le proporzioni</i>	<i>39</i>
<i>Le proporzioni.....</i>	<i>40</i>
<i>Proprietà delle proporzioni</i>	<i>40</i>

Percentuali	43
<i>La percentuale: uno strumento per fornire informazioni</i>	43
I Numeri interi relativi.....	47
I numeri interi relativi	48
<i>Introduzione</i>	48
<i>Rappresentazione grafica</i>	48
<i>L'insieme dei numeri relativi è infinito discreto</i>	49
Le quattro operazioni	50
<i>L'addizione</i>	50
<i>La Sottrazione</i>	51
<i>La Moltiplicazione</i>	52
<i>La Divisione</i>	52
<i>Le potenze</i>	53
I Numeri Razionali.....	56
I numeri razionali	57
<i>Introduzione</i>	57
<i>Rappresentazione grafica</i>	57
Le Operazioni.....	58
<i>Addizione</i>	58
<i>Sottrazione</i>	58
<i>Moltiplicazione</i>	59
<i>Divisione</i>	59
<i>Potenza</i>	60
<i>Potenza con esponente negativo</i>	61
<i>Espressioni con i numeri razionali</i>	61
Sezione 2. Calcolo letterale	62
I Monomi	63
I Monomi	64
<i>Introduzione</i>	64
<i>Monomi ridotta a forma normale</i>	65
<i>Monomi simili, uguali e opposti</i>	65
<i>Grado di un monomio</i>	66
Operazioni con i monomi.....	67
<i>Addizione e sottrazione</i>	67
<i>Moltiplicazione tra monomi</i>	67
<i>Potenza di un monomio</i>	68
<i>Quoziente di due monomi</i>	68
<i>Massimo Comun Divisore tra monomi</i>	69
<i>Minimo Comune Multiplo tra monomi</i>	69
<i>Espressioni con i monomi</i>	70
I polinomi.....	72
I Polinomi.....	72
<i>Introduzione</i>	72
<i>Proprietà dei polinomi</i>	73

Operazioni con i polinomi.....	74
<i>Addizione e sottrazione tra polinomi</i>	74
<i>Moltiplicazione tra un monomio e un polinomio</i>	75
<i>Moltiplicazione tra due polinomi</i>	76
<i>Divisione tra un monomio e un polinomio</i>	76
Prodotti Notevoli.....	77
<i>Quadrato di un binomio</i>	77
<i>Quadrato di un polinomio</i>	79
<i>Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza</i>	79
<i>Cubo di un binomio</i>	80
<i>Potenza di un binomio</i>	80
scomposizione di polinomi.....	83
Scomposizione di polinomi	83
<i>Introduzione</i>	83
<i>Raccoglimento a fattore comune</i>	84
<i>Raccoglimento a fattore parziale</i>	84
<i>Trinomio sviluppo del quadrato di un binomio</i>	85
<i>Sviluppo del quadrato di un polinomio</i>	86
<i>Differenza di due quadrati</i>	86
<i>Sviluppo del cubo di un binomio</i>	87
<i>Somma e differenza di due cubi</i>	87
<i>Scomposizione particolare trinomio di II grado</i>	88
<i>Massimo Comune Divisore e Minimo Comune Multiplo di Polinomi</i>	89
divisione tra polinomi.....	91
Divisione tra polinomi	91
<i>Introduzione</i>	91
<i>Divisione tra polinomi</i>	92
<i>Regola di Ruffini</i>	94
<i>Teorema del Resto</i>	96
<i>Scomposizione di un polinomio con il teorema del resto e la regola di Ruffini</i>	98
Frazioni algebriche.....	101
Frazioni Algebriche.....	101
<i>Introduzione</i>	101
Frazioni Algebriche.....	102
<i>Condizioni di esistenza di una frazione algebrica</i>	103
<i>Riduzione ai minimi termini di una Frazione Algebrica</i>	104
<i>Somma algebrica tra frazioni algebriche</i>	105
<i>Moltiplicazione tra frazioni algebriche</i>	108
<i>Divisione tra frazioni algebriche</i>	109
<i>Potenza di una frazione algebrica</i>	111
<i>Espressioni tra frazioni algebriche</i>	113
Sezione 3. Le Equazioni Lineari	115
Identità.....	116
Identità	116
<i>Introduzione</i>	116
<i>Condizioni di Esistenza di un'identità</i>	117
Le equazioni e I principi di equivalenza	119

Equazioni	119
<i>Introduzione</i>	119
<i>Tipi di equazione</i>	122
<i>Principi di equivalenza</i>	123
<i>Il grado di un' equazione</i>	126
Le equazioni di I grado	127
Equazioni di I grado	128
<i>Equazioni di I grado Numeriche Intere</i>	128
<i>Equazioni di I grado Impossibili</i>	129
<i>Equazioni di I grado Indeterminate</i>	129
<i>Equazioni Numeriche Fratte</i>	130
<i>Equazioni Letterali Intere</i>	131
<i>Equazioni Letterali Fratte</i>	132
<i>Equazioni di grado superiore al primo</i>	134

Sezione 1. Gli Insiemi Numerici

L'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri razionali assoluti

L'insieme dei numeri interi relativi

L'insieme dei numeri razionali

I NUMERI NATURALI

PREREQUISITI

Concetto d' insieme
Saper operare con gli insiemi
Calcolo aritmetico

OBIETTIVI

Sapere

Conoscere le quattro operazioni fondamentali nell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N}
Conoscere e applicare le proprietà delle quattro operazioni
Conoscere i procedimenti di esecuzione delle quattro operazioni nell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N}
Conoscere il concetto di potenza
Conoscere e applicare le proprietà delle potenze

Saper Fare

Saper utilizzare l'elemento neutro
Saper riconoscere se un'operazione è interna in \mathbb{N}
Saper applicare l'operazione di elevamento a potenza di un numero naturale
Saper risolvere operazioni con le potenze
Saper riconoscere un numero naturale
Saper rappresentare i numeri naturali
saper confrontare numeri naturali
Saper riconoscere se un numero naturale è divisore di un altro
Saper riconoscere se un numero naturale è multiplo di un altro
Saper riconoscere quando due o più numeri sono primi fra loro
Saper calcolare il MCD di più numeri
Saper calcolare il mcm di più numeri
Saper riconoscere un numero primo
Saper riconoscere se un numero naturale è divisibile per un altro
Saper scomporre in fattori primi
Saper risolvere le espressioni con i numeri naturali
Saper utilizzare le parentesi nella risoluzione di espressioni

I numeri naturali

Fin dall'antichità l'uomo ha sentito la necessità di contare, ordinare, classificare.

Il pastore contava le sue pecore per verificare che non ne avesse persa nemmeno una, ad ogni animale assegnava un numero:

1, 2, 3, 4, 5, 6,.....

Anche l'oste poteva contare in questo modo le sue bottiglie di vino e quando non ne aveva più in cantina poteva dire che: "Ho **zero** bottiglie di vino in cantina"

Questa sequenza di numeri viene chiamata: **INSIEME DEI NUMERI NATURALI** e si indica con il simbolo **N**.

I numeri naturali servono sia per contare che per ordinare, infatti essi hanno due aspetti: **ORDINALE** e **CARDINALE**

Il pastore che conta le pecore usa l'aspetto cardinale: *1,2,3,4,5,6.....*

Il giudice che registra l'ordine di arrivo dei corridori usa l'aspetto ordinale: *primo, secondo, terzo, quarto....*, che indica la posizione che il corridore occupa nella graduatoria

Rappresentazione grafica

I numeri naturali possono essere rappresentati su di una semiretta orientata con origine nel punto **O**, che corrisponde allo zero. Su tale retta si fissa un'unità di misura.



I numeri naturali sono infiniti; a partire dallo zero **ogni numero naturale si costruisce aggiungendo uno al precedente**.

- Ogni numero naturale ha sempre il suo **successivo**.
- Ogni numero naturale, tranne lo zero, è sempre maggiore di tutti i numeri che lo precedono
- Ogni numero naturale è sempre minore di tutti i numeri che lo seguono



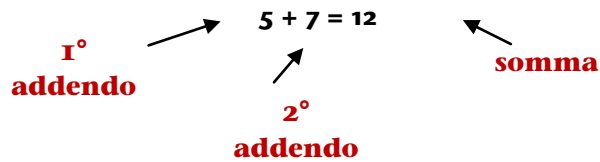
Da ciò si può dedurre che è sempre possibile confrontare i numeri naturali. Infatti, dati due qualunque numeri naturali, sussiste tra loro una e una sola delle seguenti relazioni:

- i due numeri naturali sono uguali, **a = b**, se occupano la stessa posizione sulla retta
- il primo è maggiore del secondo **a > b**, se a viene dopo di b sulla retta
- il secondo è minore del primo **b < a**, se b viene prima di a sulla retta

Le quattro operazioni

Ogni operatore “ +, x, -, : ” rappresenta un’operazione e sia gli **operandi** che il **risultato** hanno nomi ben precisi:

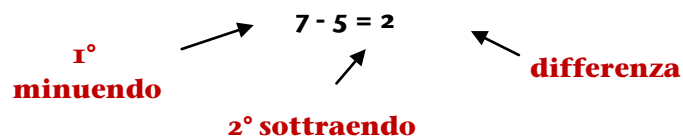
- nell’**addizione** + i due operandi si chiamano **addendi** e il risultato **somma**



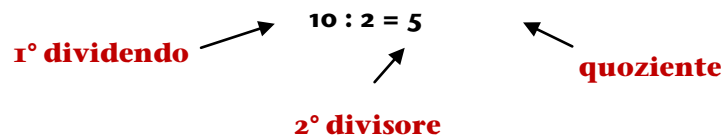
- nella **moltiplicazione** x i due operandi si chiamano **fattori** e il risultato **prodotto**



- nella **sottrazione** - il primo operando si chiama **minuendo**, il secondo **sottraendo** e il risultato **differenza**



- nella **divisione** : il primo operando si chiama **dividendo**, il secondo **divisore** e il risultato **quoziente**



Operazioni Interne

Se sommiamo o moltiplichiamo due numeri naturali il risultato sarà sempre un numero naturale. Si afferma che:

l’addizione e la moltiplicazione sono operazioni interne in \mathbb{N}

$$2 + 4 = 6 \quad 2, 4 \in \mathbb{N} \rightarrow 6 \in \mathbb{N} \quad 2 \times 4 = 8 \quad 2, 4 \in \mathbb{N} \rightarrow 8 \in \mathbb{N}$$

La differenza

La sottrazione è detta operazione inversa dell' addizione.

Definizione

La differenza tra due numeri è quel numero che addizionato al sottraendo dà come somma il minuendo

Se sottraiamo due numeri naturali non sempre è possibile avere come risultato un numero naturale.

Il risultato di una sottrazione è un numero naturale se e solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo.

$$\begin{aligned} 7 - 4 = 3 & \quad 7, 4 \in \mathbb{N} \rightarrow 3 \in \mathbb{N} \\ 2 - 4 = -2 & \quad 2, 4 \in \mathbb{N} \rightarrow -2 \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

La sottrazione non è un' operazione interna all' insieme dei numeri naturali.

La divisione

La divisione è detta operazione inversa della moltiplicazione.

Definizione

Il quoziente tra due numeri è quel numero che moltiplicato per il divisore dà come prodotto il dividendo. Affinché la divisione abbia significato il divisore deve essere sempre diverso da zero.

Se dividiamo due numeri naturali non sempre è possibile avere come risultato un numero naturale.

Il risultato della divisione è un numero naturale se e solo se il dividendo è un multiplo del divisore. Il risultato si chiama quoziente esatto

$$\begin{aligned} 8 : 4 = 2 & \quad 8, 4 \in \mathbb{N} \rightarrow 2 \in \mathbb{N} \\ 10 : 4 = 0,25 & \quad 10, 4 \in \mathbb{N} \rightarrow 0,25 \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

La divisione non è un' operazione interna all' insieme dei numeri naturali.

L' elemento neutro nelle operazioni

Se sommiamo lo zero a qualsiasi numero otteniamo come risultato il numero stesso, sia che lo zero sia il primo che il secondo addendo

$$2 + 0 = 2 \quad 0 + 4 = 4$$

0 si chiama elemento neutro per l'addizione.

La somma di due numeri è uguale a zero solo se entrambi i numeri sono zero

La sottrazione dà come risultato zero solo se minuendo e sottraendo sono uguali

Nella sottrazione, se il sottraendo è zero, la differenza coincide con il minuendo

Se moltiplichiamo qualsiasi numero per 1 il risultato è il numero stesso. Questo vale sia che l'uno sia il primo che il secondo fattore

$$2 \times 1 = 2 \quad 1 \times 4 = 4$$

1 si chiama **elemento neutro per la moltiplicazione**

Nella divisione, se il divisore è 1, il quoziente coincide con il dividendo

Se la divisione tra due numeri ha quoziente 1, allora il dividendo e il divisore sono uguali

Lo zero nelle operazioni

Nella sottrazione, se il **sottraendo è zero**, la differenza coincide con il minuendo

$$13 - 0 = 13$$

Non è possibile nell'insieme dei numeri naturali la sottrazione che abbia il minuendo uguale a zero

$$0 - 13 = -13 \rightarrow -13 \text{ non appartiene all'insieme dei numeri naturali}$$

Se in un prodotto uno dei fattori è uguale a zero il prodotto è uguale a zero

$$13 \times 2 \times 0 = 0$$

Legge dell'annullamento del prodotto

Se un prodotto è uguale a zero, almeno uno dei fattori della moltiplicazione è zero.

La **divisione tra zero** e un qualunque numero naturale dà sempre come quoziente 0, qualsiasi numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero.

$$0 : 13 = 0$$

La divisione tra un numero naturale e zero è impossibile $13 : 0 = 0$, nessun numero moltiplicato per zero dà come risultato 13.

Proprietà delle operazioni

Addizione

<p>Proprietà commutativa</p> <p>La somma di due o più numeri naturali non cambia se si cambia l'ordine degli addendi</p>	<p>$5 + 4 = 4 + 5$ infatti $5 + 4 = 9$ e $4 + 5 = 9$</p>
<p>Proprietà associativa</p> <p>La somma di tre o più numeri naturali non cambia, se si sostituisce a due o più di essi la loro somma</p>	<p>$(5 + 2) + 4 = 5 + (2 + 4)$ infatti $(5 + 2) + 4 = 7 + 4 = 11$ e $5 + (2 + 4) = 5 + 6 = 11$</p>

Moltiplicazione

<p>Proprietà commutativa</p> <p>Il prodotto di due o più numeri naturali non cambia se si cambia l'ordine dei fattori</p>	<p>$5 \times 4 = 4 \times 5$ infatti $5 \times 4 = 20$ e $4 \times 5 = 20$</p>
<p>Proprietà associativa</p> <p>Il prodotto di tre o più numeri naturali non cambia, se si sostituisce a due o più di essi il loro prodotto</p>	<p>$(5 \times 2) \times 4 = 5 \times (2 \times 4)$ infatti $(5 \times 2) \times 4 = 10 \times 4 = 40$ e $5 \times (2 \times 4) = 5 \times 8 = 40$</p>

Sottrazione

<p>Proprietà invariantiva</p> <p>La differenza di due numeri naturali non cambia, se si addiziona o si sottrae uno stesso numero sia al minuendo che al sottraendo</p>	<p>$8 - 3 = (8+2) - (3+2)$ infatti $8-3=5$ e $(8+2)-(3+2)=10-5=5$</p>
---	---

Divisione

<p>Proprietà invariantiva</p> <p>Il quoziente esatto tra due numeri naturali non cambia, se si moltiplica o si divide dividendo e divisore per uno stesso numero non nullo.</p>	<p>$12 : 6 = (12 : 2) : (6 : 2)$ infatti $12 : 6 = 2$ e $(12 : 2) : (6 : 2) = 6 : 3 = 2$</p>
--	--

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Quando si deve moltiplicare un numero per una somma si può moltiplicare quel numero per ciascun addendo) e poi sommare i prodotti ottenuti e il risultato non cambia

$$4 \times (5 + 3 + 2) = 4 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 2$$

$4 \times (5 + 3 + 2) = 4 \times 10 = 40$ e $4 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 2 = 20 + 12 + 8 = 40$

Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione

Quando si deve dividere una somma per un numero, si può dividere ciascun addendo quel numero e poi sommare i quozienti ottenuti e il risultato non cambia

$$(15 + 18) : 3 = 15 : 3 + 18 : 3$$

$(15 + 18) : 3 = 33 : 3 = 11$ e $15 : 3 + 18 : 3 = 5 + 6 = 11$

Proprietà invariante della sottrazione

In una sottrazione si può sommare o sottrarre uno stesso numero sia al minuendo che al sottraendo, che la differenza non cambia

$$x - y = (x + t) - (y + t), x \geq y$$

$$x - y = (x - t) - (y - t), x \geq y \geq t$$

Proprietà invariante della divisione

In una divisione si può moltiplicare o dividere per uno stesso numero sia al dividendo che il divisore, che il quoziente non cambia

$$x : y = (x \cdot t) : (y \cdot t), y \neq 0 \wedge t \neq 0 \wedge x = n \cdot y$$

$$x : y = (x : t) : (y : t), y \neq 0 \wedge t \neq 0 \wedge x = n \cdot y \wedge x, y \text{ multipli di } t$$

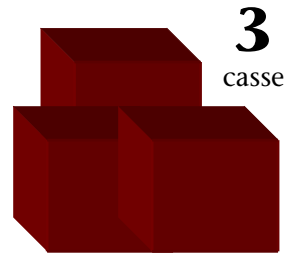
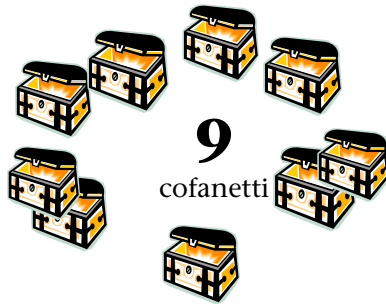
Le potenze

Paolo e Mauro trovano in cantina tre casse.

Cosa conterranno le tre scatole?

Le aprono ed escono, da ogni scatola, tre cofanetti.

Hanno adesso 9 cofanetti.



Ma cosa conterranno i 9 cofanetti?

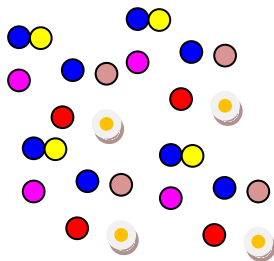
Ecco che da ogni cofanetto escono tre pacchetti.



Ma cosa conterranno questi 27 pacchetti?

Compaiono tre biglie colorate da ciascun pacchetto.

Paolo e Mauro si trovano in possesso di ben 81 biglie



81

biglie

Paolo e Mauro hanno trovato **3** casse che alla fine contenevano **81** biglie colorate, per arrivare a questo risultato hanno fatto una serie di moltiplicazioni

$$3 \text{ biglie} \times 3 \text{ pacchetti} \times 3 \text{ cofanetti} \times 3 \text{ casse} = 81 \text{ biglie}$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

In questa moltiplicazione il **fattore 3** viene moltiplicato per **4 volte**.

Il procedimento che ci ha permesso di ottenere come risultato il numero delle biglie è l'operazione aritmetica detta elevamento a **potenza** e i suoi termini sono **3** e **4** e vengono detti rispettivamente **base** ed **esponente**.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Definizione

Elevare a potenza un numero **a** vuol dire moltiplicarlo per se stesso tante volte quanto vale l'esponente.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{N volte}}$$

Proprietà delle potenze aventi ugual base

<p>Il prodotto di potenze di uguale base</p> <p>è una potenza che ha come base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti</p>	$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$ <p>infatti</p> $3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$
<p>Il quoziente di potenze di uguale base</p> <p>è una potenza che ha come base la stessa base e come esponente la differenza degli esponenti (nell'ipotesi che l'esponente del dividendo sia maggiore di quello del divisore)</p>	$3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$ <p>infatti</p> $3^5 : 3^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) : (3 \times 3) = 3^3$
<p>La potenza di una potenza</p> <p>è una potenza che ha come base la stessa base e come esponente il prodotto degli esponenti</p>	$(3^2)^3 = 3^{2 \times 3} = 3^6$ <p>infatti</p> $(3^2)^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

Proprietà delle potenze aventi ugual esponente

<p>Il prodotto di potenze con uguale esponente</p> <p>è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente il comune esponente</p>	$2^2 \times 3^2 \times 4^2 = (2 \times 3 \times 4)^2$ <p>infatti</p> $2^2 \times 3^2 \times 4^2 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (4 \times 4) =$ $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 =$ $(2 \times 3 \times 4) \times (2 \times 3 \times 4) = (2 \times 3 \times 4)^2$
<p>Il quoziente di potenze con uguale esponente</p> <p>è una potenza che ha come base il quoziente delle basi e come esponente l'esponente comune</p>	$8^2 : 4^2 = (8 : 4)^2$ <p>infatti</p> $8^2 : 4^2 = (8 \times 8) : (4 \times 4) =$ $(8 : 4) (8 : 4) = (8 : 4)^2$

Attenzione

Si definisce uguale a 1 la potenza che ha come base un qualunque numero diverso da zero e come esponente 0

$$a^0 = 1$$

Una potenza che ha come base un qualunque numero e come esponente 1 è sempre uguale alla base

$$a^1 = a$$

La potenza in cui la base e l'esponente sono uguali a zero 0^0 , è priva di significato.

Divisori e multipli di un numero

Osserva

$$24 : 3 = 8 \text{ con resto } 0$$

Possiamo affermare che “**24 è divisibile per 3**”, oppure che:

- 3 è **divisore** di 24
- 3 è **sottomultiplo** di 24
- 24 è **multiplo** di 3

Possiamo affermare che 24 è divisibile, oltre che per sé stesso e per l'unità, anche per 3 quindi **non è un numero primo**.

Come si può stabilire se un numero naturale è divisibile per 2 oppure per 3 o ancora per 5 o per 11?

In alcuni casi per decidere se un numero naturale **a** è divisibile per un numero naturale **b**, si può evitare di eseguire la divisione utilizzando dei criteri di divisibilità

Un numero naturale è divisibile per 2 se l'ultima sua cifra è 0 o un numero pari

Un numero naturale è divisibile per 3 o per 9 se la somma delle sue cifre è un numero divisibile per 3 o per 9

Un numero naturale è divisibile per 5 se l'ultima sua cifra è 0 o 5

Un numero naturale è divisibile per 4 o per 25 se lo è il numero formato dalle sue ultime due cifre

Un numero è divisibile per 11 se la differenza (presa in valore assoluto), fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari, è 0, 11 o un multiplo di 11

Un numero naturale è divisibile per 10, 100, 1000..... se termina rispettivamente con uno, due, tre,.... Zeri

Numeri Primi

Ci sono numeri naturali che non sono pari, non sono nemmeno multipli di 3, che non terminano con lo zero in conclusione esistono dei numeri naturali che ammettono come divisore solo se stessi o l'unità.

Definizione

Un numero naturale non nullo, maggiore di 1, che ammette come divisore soltanto se stesso e 1, si dice numero primo.

Proprietà

I numeri primi sono infiniti.

Ogni numero naturale maggiore di uno ha almeno un divisore primo

Un numero primo che divide un prodotto divide almeno uno dei fattori del prodotto

Un numero naturale maggiore di uno, che non sia primo, si dice numero composto.

Scomposizione in fattori primi

Un numero naturale composto può sempre essere scritto come prodotto di più fattori primi tra loro, questa operazione si dice scomposizione in fattori primi o fattorizzazione.

Essa è unica, a meno dell'ordine dei fattori, per ogni numero naturale.

Per scomporre in fattori primi un numero naturale composto si procede nel seguente modo:

si divide il numero per il più piccolo numero primo suo divisore

si divide il quoziente così ottenuto per il più piccolo numero primo suo divisore

.....

Si procede allo stesso modo sino ad ottenere come divisore 1.

Esempio

Scomporre in fattori primi il numero 882.

882		2
441		3
147		3
49		7
7		7
1		

Possiamo scrivere 882 scomposto in fattori primi : $882=2 \times 3^2 \times 7^2$

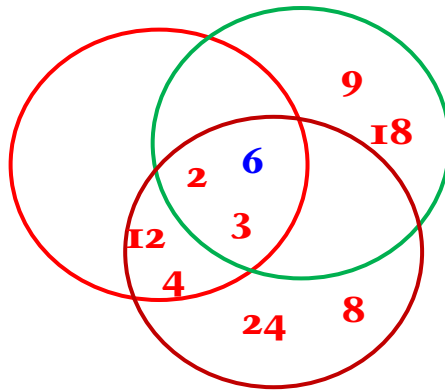
Massimo Comun Divisore

Maria deve rinnovare la vetrina del suo negozio di fiori e ha a disposizione: 12 tulipani, 24 rose, 18 gigli si sta chiedendo come fare per sistemarli nel maggior numero di vasi possibili che contengano lo stesso numero di tulipani, rose, gigli. Cerchiamo di aiutarla.

Il numero di vasi deve sicuramente essere un numero che sia divisore comune di 12, 24, 18. Per trovare questo numero possiamo procedere in due modi:

I modo)

Trovare l'insieme dei divisori di 12, 24, 18, determinare l'insieme intersezione e scegliere il valore più grande di questo insieme.



Il massimo comun divisore è **6**.

II modo)

Scomponiamo in fattori primi i numeri 12, 24, 18

$$12 = 2^2 \times 3 ; 18 = 3^2 \times 2 ; 24 = 2^3 \times 3$$

Determiniamo i fattori che sono sottomultipli comuni dei numeri dati. I fattori comuni sono 2 e 3.

Moltiplichiamo tra loro i fattori che i tre numeri hanno in comune. Il loro prodotto è 6.

Tale valore rappresenta il maggior divisore comune ai tre numeri, cioè il **Massimo Comune**

Divisore di 12, 24, 18

$$\mathbf{M.C.D.(12,24,18) = 6}$$

Due numeri che hanno come Massimo Comune Divisore l'unità si dicono primi fra loro

Conclusione

Siano **a** e **b** due numeri interi positivi; siano **A** e **B** rispettivamente, gli insiemi, non vuoti dei divisori di **a** e di **b** (entrambi gli insiemi non possono essere vuoti perché devono contenere almeno l'unità e il numero stesso).

Si definisce **Massimo Comune Divisore** di **a** e **b** e si scrive $M.C.D.(a,b)$ il valore massimo dell'insieme $A \cap B$.

In particolare se $M.C.D.(a,b)=1$ i due numeri sono primi fra loro.

Per calcolarlo si scompongono i numeri in **fattori primi** e si prendono i fattori comuni con il minimo esponente presi una sola volta

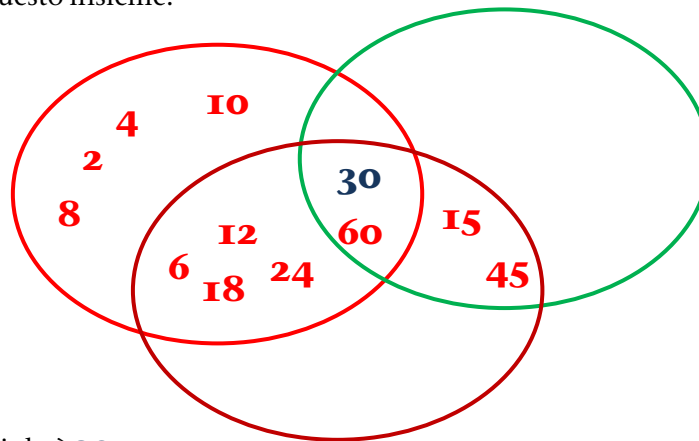
Minimo Comune Multiplo

Antonio, Marco e Filippo vanno a nuotare tutti nella stessa piscina. Antonio va ogni 2 giorni, Marco ogni 6 giorni e Filippo ogni 15 giorni. Oggi si sono trovati tutti e tre insieme a nuotare; Antonio vorrebbe sapere tra quanti giorni si troveranno nuovamente tutti insieme.

I giorni che dovranno trascorrere dovrà essere un multiplo sia di 2, sia di 6 e sia di 15. Affinché tali giorni, siano il minor numero possibile si dovrà calcolare il più piccolo multiplo in comune tra 2,6,15. Per trovare questo numero si può procedere in due modi:

I modo)

Determiniamo l'insieme dei multipli di 2, di 6 e di 15. Calcoliamo l'insieme intersezione e prendiamo il valore più piccolo di questo insieme.



Il minimo comune multiplo è **30**.

Antonio, Marco e Filippo si incontreranno in piscina dopo 30 giorni.

II modo)

Scomponiamo in fattori primi i numeri 2,6,15 e moltiplichiamo i loro fattori comuni e non comuni, presi una sola volta.

$$2=2 \quad 6=2 \times 3 \quad 15=3 \times 5$$

$$\text{m.c.m.}(2,6,15) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

Il valore che abbiamo trovato è 30, e rappresenta il minor multiplo comune dei tre numeri

Conclusione

Siano a e b due numeri interi positivi; siano A e B rispettivamente, gli insiemi, non vuoti dei multipli di a e di b . Si definisce **minimo comune multiplo** di a e b e si scrive $\text{m.c.m.}(a,b)$ il valore minimo dell'insieme $A \cap B$

In particolare si ha :

Se a è multiplo di b allora $\text{m.c.m.}(a,b) = a$

$\text{m.c.m.}(a,b) = a \cdot b$ se i due numeri sono primi fra loro

Per calcolare il m. c. m. tra due o più numeri si scompongono i numeri in fattori primi e, si prendono i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente, considerati una sola volta.

Espressioni

Consideriamo due frasi del nostro linguaggio comune, ad esempio:

Giorgio, dice Marco, non studia e **Giorgio dice: "Marco non studia"**

Queste due frasi, pur essendo costruite con le stesse parole, hanno significato completamente diverso, e questo dipende dalla punteggiatura che completa la frase legando le parole.

Anche in matematica avviene qualcosa di analogo:

- le frasi diventano le espressioni
- le parole diventano i numeri
- la punteggiatura diventano i segni di operazione e le parentesi

In matematica, queste frasi si chiamano espressioni aritmetiche

Definizione

Un'espressione aritmetica è un insieme di numeri legati fra loro da segni di operazioni, alcune delle quali possono essere racchiuse in parentesi.

Due espressioni aritmetiche sono, ad esempio:

$$25 - 8 + 5 = 22 \quad \text{e} \quad 25 - (8 + 5) = 12$$

Come puoi notare, pur usando gli stessi numeri nello stesso ordine e le stesse operazioni, abbiamo ottenuto risultati diversi.

La differenza è data dal fatto che nella seconda espressione appaiono delle parentesi tonde.

Ordine di precedenza

È necessario fare attenzione nella risoluzione di un'espressione infatti ogni operatore che vi compare (sia esso una parentesi o un segno di operazione) hanno una propria priorità.

Per quanto riguarda le operazioni possiamo parlare di priorità:

alta, come potenze, moltiplicazioni e divisioni, operazioni che devono essere risolte per prime,

$$7 - \boxed{3 \cdot 5} + \boxed{10 : 2} + \boxed{2^2} = 7 - 15 + 5 + 4$$

bassa, come somme e sottrazioni,

uguale sono operazioni che vanno risolte da sinistra verso destra

tutte le operazioni hanno uguale priorità e si procede da sinistra a destra

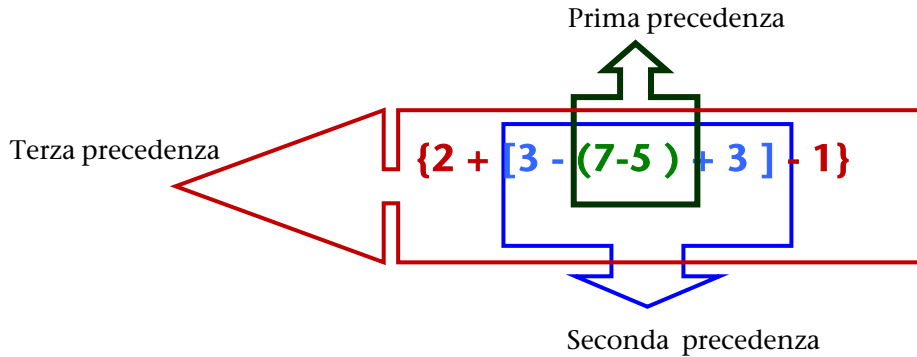
$$7 \cdot 5 \cdot 2 : 10 = 35 \cdot 2 : 10 = 70 : 10$$

Il ruolo delle parentesi

Le coppie di simboli $()$, $[]$, $\{ \}$ si chiamano: parentesi tonde, parentesi quadre, parentesi graffe.

All'interno di una coppia di parentesi si indicano delle espressioni, al cui calcolo si dà la precedenza rispetto alle operazioni fuori dalle parentesi stesse.

In caso di presenza di più tipi di parentesi, i calcoli indicati fra parentesi tonde hanno la precedenza rispetto a quelli che si trovano fra le parentesi quadre e questi hanno la precedenza rispetto alle espressioni fra parentesi graffe.



L'uso delle parentesi permette di alterare la priorità convenzionale fra i vari tipi di operazione. Ad esempio $(3 + 2) \cdot 5 \neq 3 + (2 \cdot 5)$

L'uso delle parentesi

Nelle espressioni le **parentesi**, determinano delle precedenze nel calcolo.

Le parentesi convenzionalmente più usate sono:

- **Parentesi tonde** $()$
- **Parentesi quadre** $[]$
- **Parentesi graffe** $\{ \}$
-

Si procede nel seguente modo:

Si risolvono le operazioni che compaiono nelle parentesi tonde

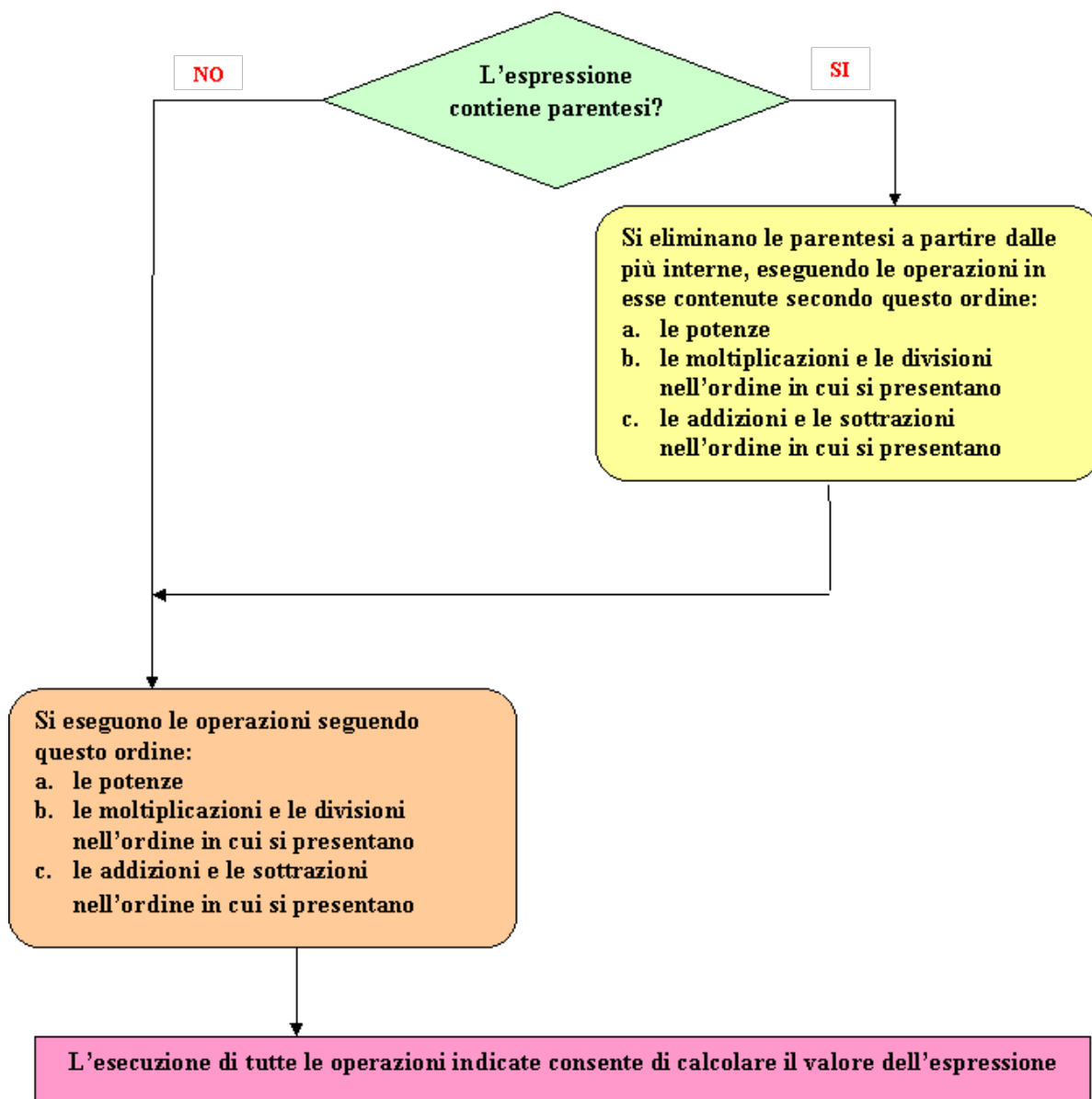
Si risolvono le operazioni che compaiono nelle parentesi quadre

Si risolvono quelle che compaiono nelle parentesi graffe

Esempio

$$\{6^2 : (3 + 2^2 - 1) + 3 \cdot 7\} - (2^4 + 2) = \{6^2 : (3 + 4 - 1) + 3 \cdot 7\} - (16 + 2) = \{6^2 : 6 + 3 \cdot 7\} - 18 = \{6 + 21\} - 18 = \{27 - 18\} = 9$$

Per calcolare il valore delle espressioni in modo corretto bisogna ricordare alcune regole



HAI IMPARATO CHE ...

1. I numeri naturali servono sia per *contare* che per *ordinare*, infatti essi hanno due aspetti: **ordinale** e **cardinale**
2. I numeri naturali possono essere rappresentati disponendoli a intervalli uguali lungo una semiretta orientata con origine nello zero
3. I numeri naturali sono infiniti: a partire dallo zero ogni numero naturale si costruisce aggiungendo uno al **precedente**. Ogni numero naturale ha sempre il suo **successivo**.
4. È sempre possibile confrontare i numeri naturali. Infatti dati due qualunque numeri naturali, sussiste tra loro una e una sola delle seguenti relazioni:
 - a. i due numeri naturali sono uguali, $\mathbf{a = b}$, se occupano la stessa posizione sulla retta
 - b. il primo è maggiore del secondo $\mathbf{a > b}$, se a viene dopo di b sulla retta
 - c. il secondo è minore del primo $\mathbf{b < a}$, se b viene prima di a sulla retta
5. Gli **elementi** delle quattro operazioni si chiamano
 - a. addendi e il risultato somma, per l'addizione
 - b. fattori e il risultato prodotto, per la moltiplicazione
 - c. rispettivamente minuendo, sottraendo e il risultato differenza, per la sottrazione
 - d. rispettivamente dividendo, divisore e il risultato quoziente, per la divisione
6. Si dice che la somma e la moltiplicazione sono **operazioni interne** in \mathbf{N} . Se sottraiamo o dividiamo due numeri naturali, non sempre invece è possibile avere come risultato un numero naturale. Il risultato di una sottrazione è un numero naturale se e solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo. Il risultato della divisione è un numero naturale se e solo se il dividendo è un multiplo del divisore. Il risultato si chiama quoziente esatto
7. Esiste l'**elemento neutro** per la moltiplicazione e per l'addizione e sono rispettivamente **1** e **0**
8. Le **proprietà** delle operazioni sono:
 - a. per l'addizione: proprietà commutativa, proprietà associativa
 - b. per la moltiplicazione: proprietà commutativa, proprietà associativa, proprietà distributiva rispetto alla somma e alla differenza
 - c. per la sottrazione: proprietà invariantiva
 - d. per la divisione: proprietà invariantiva, proprietà distributiva rispetto alla somma e alla differenza
9. Dati due numeri naturali \mathbf{a} e \mathbf{n} diversi da zero elevare a **potenza** il numero \mathbf{a} vuol dire moltiplicarlo per se stesso tante volte quanto vale l'esponente \mathbf{n}
10. L'elevamento a potenza dei numeri naturali gode di alcune **proprietà**
 - il prodotto di due potenze di ugual base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
 - il quoziente di due potenze di ugual base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti $a^n : a^m = a^{n-m}$, con $m > n$
 - la potenza di una potenza è uguale ad una potenza di ugual base elevata ad un esponente uguale al prodotto degli esponenti $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
 - il prodotto tra due o più potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
 - il quoziente tra due potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza avente per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente $a^n : b^n = (a : b)^n$

HAI IMPARATO CHE ...

13. Siano a e b due numeri interi positivi; siano A e B rispettivamente, gli insiemi, non vuoti dei divisori di a e di b (entrambi gli insiemi non possono essere vuoti perché devono contenere almeno l'unità e il numero stesso).
14. Siano a e b due numeri interi positivi; siano A e B rispettivamente, gli insiemi, non vuoti dei divisori di a e di b (entrambi gli insiemi non possono essere vuoti perché devono contenere almeno l'unità e il numero stesso).
15. Si definisce **Massimo Comune Divisore** di a e b e si scrive $M.C.D.(a,b)$ il valore massimo dell'insieme $A \cap B$.
In particolare se $M.C.D.(a,b)=1$ i due numeri sono primi fra loro. Per calcolarlo si scompongono i numeri in **fattori primi** e si prendono i fattori comuni con il minimo esponente presi una sola volta
16. Per stabilire se un numero naturale è divisibile per un altro, si utilizzano i **criteri di divisibilità**
- Un numero naturale è divisibile per 2 se l'ultima sua cifra è 0 o un numero pari
 - Un numero naturale è divisibile per 3 o per 9 se la somma delle sue **cifre** è divisibile per 3 o per 9
 - Un numero naturale è divisibile per 5 se l'ultima sua cifra è 0 o 5
 - Un numero naturale è divisibile per 4 o per 25 se lo è il numero formato dalle sue ultime due cifre
 - Un numero naturale è divisibile per **10, 100, 1000.....** se termina rispettivamente con uno, due, tre, zeri
 - Un numero è divisibile per 11 se la differenza (presa in valore assoluto), fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari, è 0, **11** o un multiplo di **11**
17. Un numero naturale non nullo, maggiore di **1**, che ammette come divisore soltanto se stesso e **1**, si dice **numero primo**.
18. Un numero naturale maggiore di uno, che non sia primo, si dice **numero composto**
19. Un numero naturale composto può sempre essere scritto come prodotto di più fattori primi tra loro, questa operazione si dice **scomposizione in fattori primi** o fattorizzazione.
20. Siano a e b due numeri interi positivi; siano A e B rispettivamente, gli insiemi, non vuoti dei multipli di a e di b Si definisce **minimo comune multiplo** di a e b e si scrive $m.c.m.(a,b)$ il valore minimo dell'insieme $A \cap B$
In particolare si ha :
Se a è multiplo di b allora $m.c.m.(a,b) = a$
21. Un'**espressione aritmetica** è un insieme di numeri legati fra loro da segni di operazioni, alcune delle quali possono essere racchiuse in parentesi.
22. Nelle espressioni puoi trovare anche delle **parentesi** che determinano delle precedenze nel calcolo. Esistono tre tipi di parentesi: tonde $()$, quadre $[\]$, graffe $\{ \}$.
23. Per risolvere un'espressione devi prima eliminare le parentesi tonde, poi le quadre ed infine le graffe, eseguendo le operazioni in esse contenute secondo questo ordine: le

I NUMERI RAZIONALI ASSOLUTI

PREREQUISITI

Gli insiemi dei numeri naturali
Le operazioni con i numeri naturali
Massimo comun divisore tra due o più numeri naturali
Minimo comune multiplo tra due o più numeri naturali
Risoluzione di un' espressione tra numeri naturali

OBIETTIVI

Sapere

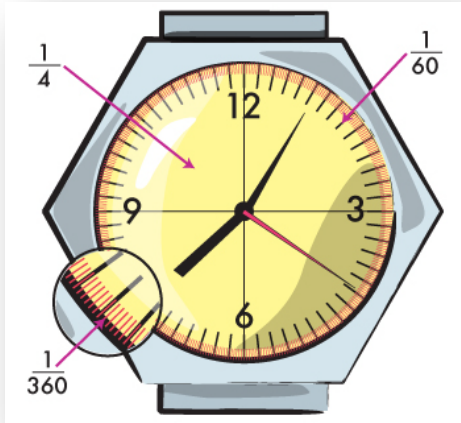
Conoscere i vari tipi di frazione
Conoscere le frazioni equivalenti
Conoscere le operazioni fondamentali nell'insieme dei numeri razionali
Conoscere i numeri decimali finiti e periodici
Conoscere le proporzioni
Conoscere le percentuali

Saper Fare

Saper confrontare due o più frazioni
Saper ridurre le frazioni ai minimi termini
Saper risolvere espressioni con le frazioni
Saper trasformare un numero decimale in una frazione
Saper trasformare una frazione in un numero decimale
Saper operare con le proporzioni
Saper operare con le percentuali

Introduzione

Fin dall' antichità l'uomo si è trovato di fronte alla necessità di dividere in parti uguali una certa quantità o un certo numero di oggetti: nasce da qui il concetto di frazione.

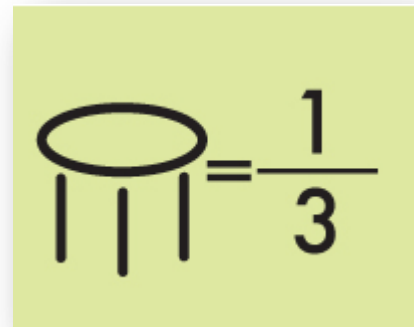


Se prendiamo in considerazione l'ora, potremo dividerla in quarti d'ora oppure in 60 minuti oppure in 360 secondi, o ancora in parti più piccole. Ciascuna delle parti ottenute si indica con il simbolo $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{360}$ dell'ora, che chiameremo unità frazionarie.

Generalizzando possiamo chiamare queste frazioni "un ennesimo di ora": $\frac{1}{n}$.

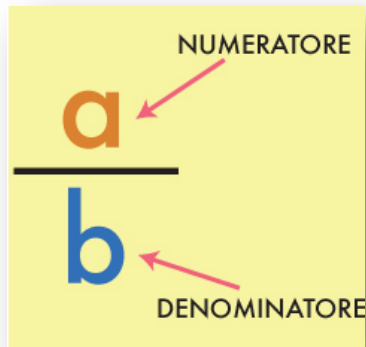
Le frazioni nell'antichità

Particolari frazioni furono conosciute fin da tempi remotissimi. I Babilonesi consideravano solo frazioni sessagesimali, cioè aventi come denominatore 60 o una potenza di 60. Tracce di tali frazioni restano oggi nella divisione dell'angolo di 1 grado in 60 primi e del primo in 60 secondi o dell'analogia divisione dell'ora. Le iscrizioni geroglifiche egiziane presentano una notazione speciale per le frazioni aventi numeratore l'unità. Il simbolo che vedi significava "una parte di" e le tre linee rappresentavano 3. Uno dei più famosi papiri egiziani "il papiro di Rhind" conservato presso il British Museum di Londra riporta una raccolta di problemi risolti con le frazioni e costituisce il più antico ed importante documento, da esso si scopre che gli Egiziani usavano le sole frazioni unitarie ad eccezione della frazione $\frac{2}{3}$.



Definizione

Si dice frazione il quoziente tra due numeri naturali a e b , con il divisore b sempre diverso da zero.

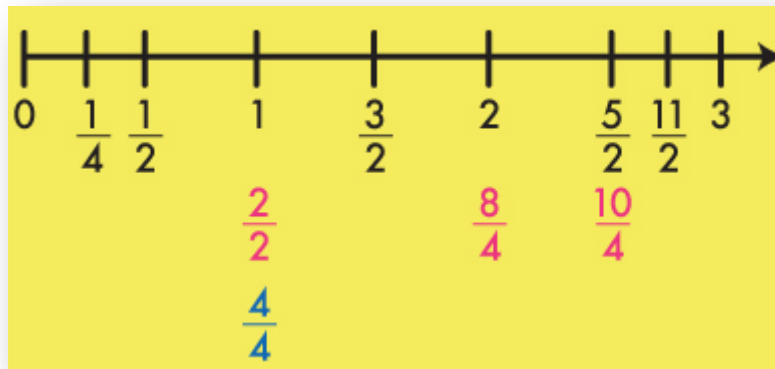


Il simbolo **a** si chiama **numeratore** e indica il numero di parti che si considerano.

Il simbolo **b** si chiama **denominatore** e indica in quante parti **uguali** è stata divisa l'unità.

Tipi di frazione

Nell'insieme dei numeri naturali si possono addizionare e moltiplicare due numeri qualsiasi ottenendo sempre come risultato un numero intero. Il quoziente di due numeri interi non è invece sempre intero.



Considera l'operazione $5 : 2$. Il quoziente **non è più un numero intero**: hai bisogno di utilizzare spazi intermedi tra gli interi rappresentati su una retta.

Osservando la rappresentazione, possiamo affermare che:

le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore occupano tutte la stessa posizione degli interi: le chiameremo **apparenti**

le frazioni che hanno il numeratore più piccolo del denominatore si trovano tra zero e uno: le chiameremo **proprie**

le frazioni che hanno il numeratore più grande del denominatore si trovano oltre l'unità: le chiameremo **improprie**

Frazioni equivalenti

Definizione

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono equivalenti se $a \cdot d = b \cdot c$, oppure se hanno lo stesso quoziente.

L'equivalenza tra due frazioni si indica $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$

Tutte le frazioni che rappresentano un medesimo quoziente si possono considerare come un unico numero detto **Numero Razionale Assoluto**

Esempio

Le frazioni $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{20}$ sono equivalenti.

Infatti se moltiplichiamo $a \cdot d = b \cdot c$ otteniamo $\frac{2}{5} \rightsquigarrow \frac{8}{20}$ $2 \cdot 20 = 40$ e $5 \cdot 8 = 40$

Proprietà Invariantiva

Data una frazione, moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero naturale **diverso da zero** oppure dividendo entrambi per uno stesso numero, diverso da zero, si ottiene una frazione equivalente a quella data.

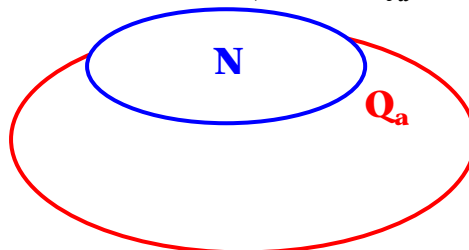
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad \vee \quad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}, \text{ con } k \neq 0$$

Esempio

Consideriamo la frazione $\frac{3}{7}$ e moltiplichiamo numeratore e denominatore per 4, otteniamo $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}$. Moltiplichiamo a con d e b con c e otteniamo $3 \cdot 28 = 84$ e $7 \cdot 12 = 84$, le due frazioni sono equivalenti.

Un numero intero può essere considerato il quoziente tra se stesso e l'unità, quindi possiamo rappresentarlo come una frazione avente al denominatore 1.

Possiamo definire l'insieme dei numeri razionali assoluti e indicarlo con Q_a , come, l'insieme composto dai numeri naturali e dai razionali, cioè $N \subset Q_a$



Riduzione ai minimi termini

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** quando il massimo comun divisore dei suoi termini è 1, cioè quando il numeratore e il denominatore sono primi tra loro.

Per poter ridurre una frazione ai minimi termini si procede nel seguente modo:

- si calcola il M.C.D. tra numeratore e denominatore
- si divide il numeratore e il denominatore per il massimo comun divisore calcolato

Esempio

Ridurre la frazione $\frac{20}{12}$ ai minimi termini.

Calcoliamo il M.C.D.(20, 12). $20=2^2 \cdot 5$ e $12=2^2 \cdot 3$, M.C.D.(20, 12)=4. Dividiamo numeratore e denominatore per 4:

$$\frac{20}{12} = \frac{20:4}{12:4} = \frac{5}{3} \quad \text{con} \quad \frac{20}{12} \sim \frac{5}{3}$$

Semplificare una frazione vuol dire ridurla ai minimi termini

Una frazione si dice **irriducibile** quando, non è più semplificabile.

Osservazione

Data una generica frazione, se applichiamo la proprietà invariante, cioè se moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per i numeri naturali 1, 2, 3, 4, otteniamo infinite frazioni equivalenti tra loro.

L'insieme di queste frazioni generano una classe di equivalenza.

Una classe di equivalenza può essere rappresentata da una qualsiasi frazione (tra quelle equivalenti) racchiusa in parentesi quadrate $\left[\frac{a}{b}\right]$, ma è preferibile utilizzare quella ridotta ai minimi termini.

Esempio

La classe $\left[\frac{2}{3}\right]$ è composto dall'insieme $\left\{\frac{2}{3}; \frac{4}{6}; \frac{6}{9}; \frac{8}{12}; \dots \dots \dots\right\}$

Operazioni con le frazioni

Confronto tra frazioni

Confrontare due frazioni significa **stabilire se esse sono o no equivalenti** e, nel caso non lo siano, qual è la maggiore o la minore.

Distinguiamo i seguenti casi:

se due frazioni hanno lo **stesso numeratore** è **minore** la frazione che ha il denominatore più grande

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{c} \text{ se } b > c$$

se due frazioni hanno **lo stesso denominatore** è **minore** la frazione che ha il numeratore minore:

$$\frac{b}{a} < \frac{c}{a} \text{ se } b < c$$

se le due frazioni sono **una propria e una impropria** è **minore** quella propria

In generale per confrontare due frazioni si procede nel seguente modo:

- si riducono le frazioni ai minimi termini
- si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni
- si calcola il quoziente tra il m.c.m. e ciascun denominatore delle frazioni
- si moltiplica il numeratore di ogni frazione per il quoziente corrispondente precedentemente ottenuto
- si ottengono frazioni equivalenti a quelle date avente tutte lo stesso denominatore (il m.c.m. calcolato)
- si confrontano quindi i numeratori delle frazioni ottenute

osservazione

La riduzione di due o più frazioni al medesimo denominatore si utilizza sia per confrontarle tra loro, sia per sommarle sottrarle

Esempio

Confrontiamo $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$

Calcoliamo il minimo comune multiplo tra (4, 5, 6): **m.c.m. = 60**

Determiniamo le frazioni equivalenti a quelle date e avente come denominatore 60.

$$\frac{3}{4} = \frac{45}{60}, \frac{2}{5} = \frac{24}{60}, \frac{5}{6} = \frac{50}{60}$$

Possiamo dire che: $\frac{2}{5} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

Addizione e Sottrazione tra frazioni

Per aggiungere o sottrarre due o più frazioni si procede nel seguente modo:

si riducono le frazioni allo stesso denominatore
 si scrive una frazione avente come numeratore l'addizione (o sottrazione) dei singoli numeratori
 e come denominatore quello comune trovato
 si ottiene una frazione avente come numeratore la somma (o la sottrazione) dei nuovi numeratori
 e per denominatore il minimo comune denominatore trovato

Esempio

Svolgere la seguente somma $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6}$

Calcoliamo il minimo comune multiplo tra (4, 5, 6): m.c.m. = 60

Otteniamo $\frac{45}{60} + \frac{24}{60} + \frac{50}{60} = \frac{45+24+50}{60} = \frac{119}{60}$

Moltiplicazione tra frazioni

Per moltiplicare tra loro due o più frazioni si scrive una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori. Se la frazione non è ridotta ai minimi termini si semplifica.

Esempio

Svolgere la seguente moltiplicazione $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$

Otteniamo $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

Definizione

Due frazioni si dicono reciproche (o inverse una dell'altra) quando il numeratore di una è il denominatore dell'altra e viceversa.

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{b}{a}$$

Proprietà

Il prodotto di due frazioni reciproche è sempre uguale ad uno.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Divisione tra due frazioni

Per dividere una frazione con un'altra, si moltiplica la prima frazione per l'inversa della seconda.

Esempio

Svolgere la seguente divisione $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$.

$$\text{Otteniamo } \frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

Elevamento a potenza di una frazione

Per elevare a potenza una frazione si deve elevare alla stessa potenza sia il numeratore che il denominatore.

Esempio

Calcolare la seguente potenza $\left(\frac{3}{4}\right)^3$. Otteniamo $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{(3)^3}{(4)^3} = \frac{27}{64}$

Per i numeri razionali assoluti valgono le proprietà delle potenze enunciate per i numeri naturali.

Espressioni con i numeri razionali assoluti

Per risolvere le espressioni valgono tutte le osservazioni fatte relative alle espressioni con i numeri naturali.

Esempio

Calcolare il valore della seguente espressione $\left[1 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{8}\right)\right] : \frac{3}{2}$

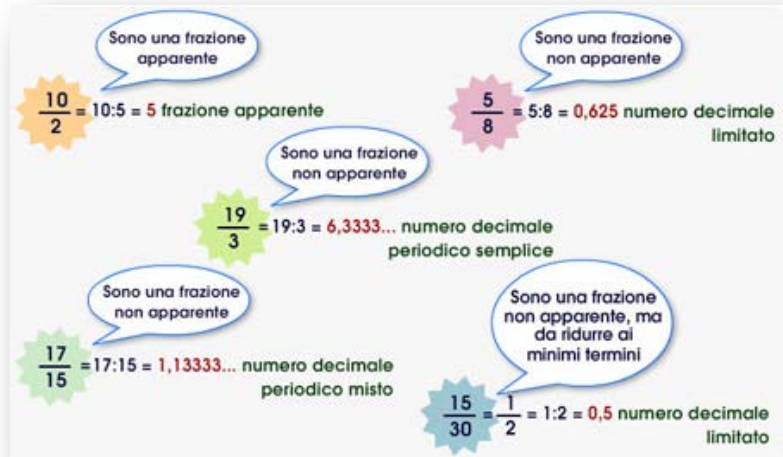
$$\left[1 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{27}{8}\right)\right] : \frac{3}{2} = \left[1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right] : \frac{3}{2} = \left[\frac{4 + 6 - 1 + 6}{4}\right] : \frac{3}{2} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{2}$$

I Numeri Razionali e i numeri decimali

Dalle frazioni ai numeri decimali

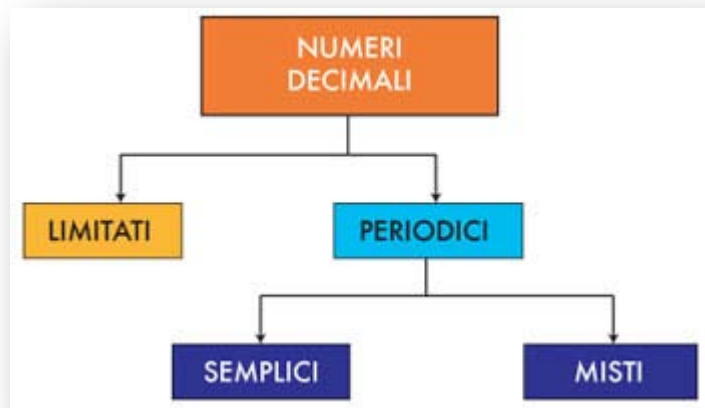
Osserva questa immagine. Vediamo cosa succede ad ogni frazione, se dividiamo il proprio numeratore con il denominatore. A parte il caso della frazione apparente $\frac{10}{2}$ che corrisponde al numero intero 5, tutte le altre frazioni danno come quoziente un numero non intero, cioè dei numeri decimali.

A loro volta i numeri decimali sono diversi tra loro.



Possiamo affermare che i numeri decimali sono di due tipi:

- **decimali limitati (o finiti)**
- **decimali periodici**
 - a) decimali periodi semplici
 - b) decimali periodici misti



I numeri **decimali si ottengono dalla divisione di frazioni non apparenti**, cioè frazioni in cui il numeratore non è uguale o multiplo del denominatore.

Un numero decimale è composto da una **parte intera** (quella che precede la virgola) e una **parte decimale** (quella che segue la virgola).

Esempio

Considera il numero decimale 32,53 e trasformalo in frazione.

La parte intera è 32 e la parte decimale è 0,53.

Il numero decimale si può trasformare in frazione sommando le sue parti nel seguente modo:

30 decine + 2 unità + 5 decimi + 3 centesimi

$$30 + 2 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} = \frac{3000 + 200 + 50 + 3}{100} = \frac{3253}{100}$$

Numeri decimali limitati

Data una frazione non apparente, se si divide il numeratore con il denominatore e si ottiene resto zero, abbiamo un **numero decimale limitato** (o finito).

Esempio

Data la frazione non apparente, $\frac{5}{2}$ determina il numero decimale corrispondente.

Dividiamo il numeratore con il denominatore e otteniamo:

$$5:2=2,5.$$

Il numero decimale ottenuto 2,5 è limitato.

Definizione

Un numero decimale è limitato (o finito) se è costituito da una parte intera (quella che precede la virgola) e una parte decimale (quella che segue la virgola) il cui numero di cifre è finito.

Numeri decimali periodici

Data una frazione non apparente, se si divide il numeratore con il denominatore e otteniamo resti sempre diversi da zero, ma che si ripetono con regolarità, abbiamo un **numero decimale periodico**

Le cifre del quoziente che si ripetono prende il nome di **periodo**.

Il periodo si indica tra parentesi tonde (201) oppure $\overline{201}$

I numeri periodici si suddividono a loro volta in periodici semplici e misti.

Definizione

Un numero decimale è **periodico semplice** se il periodo si ripete subito dopo la virgola.

Esempio

$$5,(\underline{36901})$$

Definizione

Un numero decimale è **periodico misto** se tra la virgola e il periodo si trovano altre cifre, dette **antiperiodo**.

Esempio

$$5,401(\underline{36901})$$

Conclusione

Una frazione non apparente, può essere rappresentata o da un numero decimale limitato o da un numero decimale periodico.

Criteri per riconoscere un numero decimale

Una frazione ridotta ai minimi termini da' origine ad un numero decimale limitato se al denominatore appare un numero che ha come fattori primi o solo 2 o solo 5 oppure entrambi i fattori 2 e 5.

Esempio

$$\frac{9}{5} = 1,8 \text{ oppure } \frac{25}{10} = 2,5 \text{ oppure } \frac{15}{2} = 7,5$$

Una frazione ridotta ai minimi termini da' origine ad un numero decimale periodico semplice se al denominatore appare un numero che non contiene come fattori primi né 2 e né 5 .

Esempio

$$\frac{9}{7} = 1,(\underline{285714})$$

Una frazione ridotta ai minimi termini da' origine ad un numero decimale periodico misto se al denominatore appare un numero che contiene come fattori primi o 2 o 5 e altri numeri .

Esempio

$$\frac{9}{14} = 0,64(\underline{285714})$$

Le frazioni generatrici di numeri decimali

Vediamo come, a partire da un numero decimale, si può ricostruire la frazione da cui è stato generato.

Frazione generatrice di un numero decimale limitato

Definizione

La frazione generatrice di un numero decimale limitato è una frazione avente al numeratore il numero privato della virgola e al denominatore 10, 100, 1000 a seconda del numero di cifre, cioè l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato.

Esempio

$$2,5 = \frac{25}{10} ; 0,3 = \frac{3}{10} ; 2,75 = \frac{275}{100}$$

Frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice

Definizione

La frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice è una frazione avente al numeratore la differenza tra tutto il numero privato della virgola e la sua parte intera e al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Esempio

$$32,\overline{52} = \frac{3252-32}{99} = \frac{3220}{99} ;$$

Frazione generatrice di un numero decimale periodico misto

Definizione

La frazione generatrice di un numero decimale periodico misto è una frazione avente al numeratore la differenza tra tutto il numero privato della virgola e tutta la parte che precede il periodo (quindi sia le cifre della parte intera che quelle dell'antiperiodo), privata della virgola e al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo

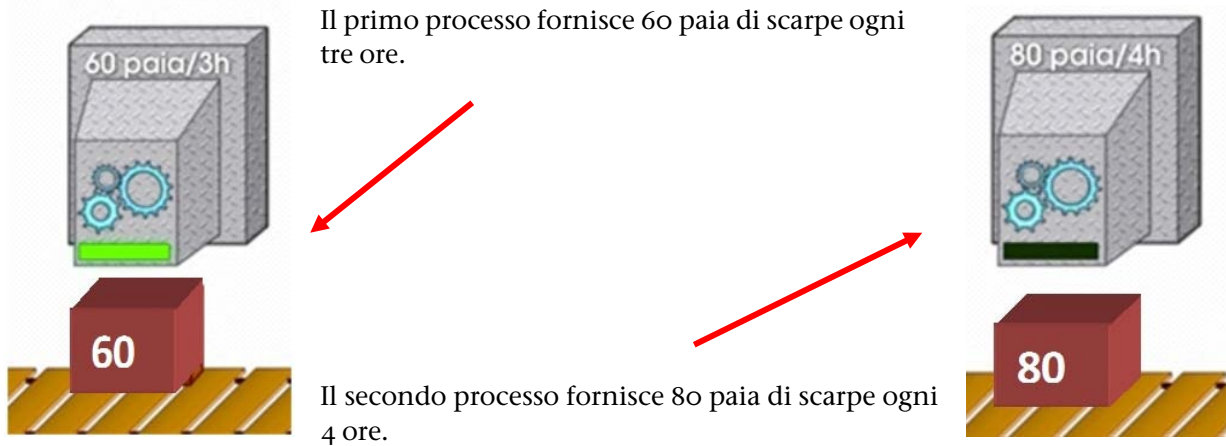
Esempio

$$32,5(2) = \frac{3252-325}{90} = \frac{2927}{90} ;$$

Rapporti e proporzioni

La produzione e le proporzioni

Hai a disposizione due processi produttivi di scarpe.



In dodici ore, per esempio, entrambi i processi producono 240 paia di scarpe: il primo ciclo produttivo produce infatti meno scarpe, ma più velocemente, mentre il secondo ne produce di più in maggior tempo.

Osserva, ora, i risultati della produzione per i due processi produttivi. Qual è il processo produttivo migliore?

PROCESSO A		PROCESSO B	
TEMPO DI LAVORO	N° DI SCARPE	TEMPO DI LAVORO	N° DI SCARPE
3 ORE	60	4 ORE	80
6 ORE	120	8 ORE	160
9 ORE	180	12 ORE	240
12 ORE	240	16 ORE	320
16 ORE	320	20 ORE	400

Il sistema **A** produce 60 paia di scarpe in tre ore e il processo **B** 80 paia di scarpe in quattro ore. Vediamo quante paia di scarpe si producono in un'ora.

processo A $60 : 3 = 20$

processo B $80 : 4 = 20$

I rapporti sono uguali quindi ogni processo impiega lo stesso tempo per produrre un paio di scarpe. In un'ora ne vengono prodotte 20!

Quindi le ore impiegate sono in proporzione con la **produzione** ottenuta.

Nelle due tabelle, una per il processo A e una per il processo B, la formula che fa calcolare la produzione è la stessa:

produzione = 20 · tempo di lavoro

Le proporzioni

I processi produttivi precedenti hanno evidenziato che in un' ora si producono il medesimo numero di paia di scarpe quindi possiamo affermare che esiste la seguente uguaglianza:

$$60 : 3 = 80 : 4$$

Tale relazione si legge **60 sta a 3 come 80 sta a 4** e si chiama **proporzione** e mette a confronto il processo A con il processo B

Definizione

Dati quattro numeri a, b, c e d (con b e d diversi da zero) presi nell'ordine, si dice che sono in proporzione se il rapporto tra il primo e il secondo è uguale al rapporto tra il terzo e il quarto.

$$a : b = c : d$$

I termini di una proporzione si indicano nel seguente modo:

- a e c sono gli **antecedenti**
- b e d sono i **consequenti**
- b e c si dicono **medi**
- a e d si dicono **estremi**

È detto **quarto proporzionale** dopo tre termini dati in un certo ordine, il quarto termine della proporzione.

Una proporzione si dice continua quando ha i medi uguali

$$a : b = b : c$$

Il **quarto termine** c di una proporzione continua è detto **terzo proporzionale**.
Uno dei due **medi uguali** b è detto **medio proporzionale**.

Proprietà delle proporzioni

Proprietà Fondamentale

In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

Dimostrazione

Consideriamo la proporzione $a : b = c : d$, può essere scritta come rapporto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Moltiplichiamo entrambe le due frazioni per $b \cdot d$ e, otteniamo

$$a \cdot d = c \cdot b$$

Da questa proprietà fondamentale è possibile, conoscendo tre termini ricavare il quarto incognito.

In una proporzione qualsiasi, un estremo è uguale al prodotto dei due medi diviso l' estremo noto.

$$a = \frac{c \cdot b}{d}$$

In una proporzione qualsiasi, un medio è uguale al prodotto dei due estremi diviso il medio noto.

$$b = \frac{a \cdot d}{c}$$

In una proporzione continua, $a : b = b : c$, un medio è uguale alla radice quadrata del prodotto dei due estremi.

$$b = \sqrt{a \cdot c}$$

Esempi

Data la proporzione $3 : 4 = x : 7$ determina il valore del medio x

In una proporzione qualsiasi, un medio è uguale al prodotto dei due estremi diviso il medio noto.

$$x = \frac{7 \cdot 3}{4} \rightarrow x = \frac{21}{4}$$

Data la proporzione continua $4 : b = b : 9$ determina b .

In una proporzione continua, $a : b = b : c$, un medio è uguale alla radice quadrata del prodotto dei due estremi.

$$b = \sqrt{4 \cdot 9} \rightarrow b = \sqrt{36} \rightarrow b = 6$$

Determinare il medio proporzionale tra 9 e 100.

La proporzione è continua e detto x il medio proporzionale avrà la forma

$$9 : x = x : 100$$

Sappiamo che in una proporzione continua il medio proporzionale è uguale a

$$b = \sqrt{a \cdot c}$$

Sostituiamo e otteniamo

$$x = \sqrt{9 \cdot 100} = 30$$

Determinare il quarto proporzionale tra 4, 5 e 3.

Chiamiamo x il quarto proporzionale e per la proprietà fondamentale delle proporzioni otteniamo:

$$4 : 5 = 3 : x \rightarrow 4x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{4}$$

Proprietà dell' invertire

In una proporzione se si scambiano gli antecedenti con i conseguenti si ottiene una nuova proporzione

$$a : b = c : d \text{ equivale } b : a = d : c$$

Proprietà del permutare

In una proporzione se si scambiano tra loro i medi o gli estremi si ottiene una nuova proporzione

$$a : b = c : d$$

$$a : c = b : d \quad \text{scambiando i medi}$$

$$d : b = c : a \quad \text{scambiando gli estremi}$$

Proprietà dello scomporre

In una proporzione la differenza tra il maggiore e il minore dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la differenza tra il maggiore e il minore degli altri due sta al terzo (o al quarto)

$$a : b = c : d$$

$$(a - b) : a = (c - d) : c \quad \text{o} \quad (a - b) : b = (c - d) : d$$

Proprietà del comporre

In una proporzione la somma tra il maggiore e il minore dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la somma tra il maggiore e il minore degli altri due sta al terzo (o al quarto)

$$a : b = c : d$$

$$(a + b) : a = (c + d) : c \quad \text{o} \quad (a + b) : b = (c + d) : d$$

Esempio

E' data la proporzione $6 : 2 = 24 : 8$

Se permutiamo i medi otteniamo $6 : 24 = 2 : 8$

Se invertiamo i termini otteniamo $2 : 6 : 8 : 24$

Se scomponiamo otteniamo $(6 - 2) : 2 = (24 - 8) : 8 \rightarrow 4 : 2 = 16 : 8$

Se componiamo otteniamo $(6 + 2) : 6 = (24 + 8) : 24 \rightarrow 8 : 6 = 32 : 24$

Percentuali

L'uso delle percentuali è molto diffuso. Ma che cosa è una percentuale? Quando viene usata?

La percentuale: uno strumento per fornire informazioni

Si fa spesso un largo uso delle percentuali quando si vogliono riportare dati statistici, occuparsi di fenomeni finanziari, confrontare fenomeni di varia natura. Ma che cosa è una percentuale? Si tratta di **un'altra possibilità di rappresentare le frazioni**.

Esempio

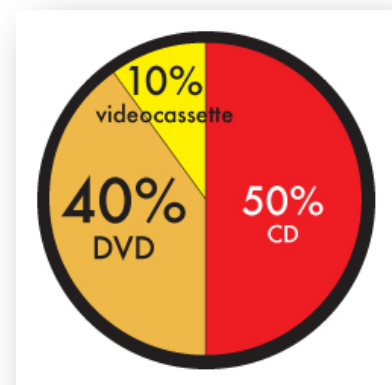
La Digipop è una società che produce DVD, CD musicali e videocassette. Osserva l'immagine a destra, che rappresenta la sua produzione.

Cosa vuol dire che il 40% della produzione è rappresentato da CD?

Significa che, avendo teoricamente la società Digipop prodotto 100 unità, 40 di queste sono rappresentate da CD musicali.

Quindi $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

Dire il 40% delle vendite è rappresentato da CD musicali equivale ad affermare che $\frac{2}{5}$ delle vendite è rappresentato da CD musicali.



La statistica e le percentuali

La statistica è una scienza derivata dalla matematica che trova applicazioni in moltissime discipline: biologia, genetica, fisica, economia, psicologia, e così via.

Il metodo statistico è fondato sullo studio di fenomeni collettivi allo scopo di ricavare, pur nella varietà delle singole manifestazioni, le leggi soggiacenti ai fenomeni stessi.

Nell'organizzazione dei dati statistici si fa un grande uso delle percentuali proprio perché di più immediata comprensione.

Nell'esempio in figura il riferimento alla produzione percentuale della Digipop è più immediato e comprensibile.

PRODUZIONE DIGIPOP		
	PRODUZIONE	%
CASSETTE	20.000	10
CD	80.000	40
DVD	100.000	50
TOTALE	200.000	100

La matematica finanziaria

Un'importante applicazione delle percentuali si ha nella matematica finanziaria, in quella parte della matematica che si occupa di tutti i problemi relativi all'impiego di denaro. I tassi utilizzati dagli istituti di credito vengono sempre espressi in percentuale.

Per esempio un tasso di interesse semplice del 3% annuo significa che investendo una somma di 100 Euro per un anno otterremo un interesse di 3 Euro.

Se chiamiamo con C il capitale investito, con t il periodo di tempo in cui il capitale rimane investito, con i il tasso di interesse e con I l'interesse, si ottiene:

$$100 : i = C : I \rightarrow 100 \cdot I = C \cdot i \rightarrow I = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

Formula che ci permette di calcolare l'interesse.

Esempio

Se $C=2000$, $t=2$ anni e $i=4\%$ otterremo:

$$I = \frac{2000 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 160$$

L'interesse percepito su 2.000 Euro dopo 2 anni sarà pari a 160 Euro.

Definizione

La percentuale è la quantità numerica che indica quante unità rispetto a cento soddisfano una certa condizione.

Una frazione si può trasformare in una percentuale formando al denominatore il numero 100

Data la frazione $\frac{3}{5}$ moltiplicando numeratore e denominatore per 20 otteniamo $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$

Esempi

Durante una vendita promozionale un articolo, che prima costava 80 Euro, viene venduto a 60 Euro. Qual è stato lo sconto percentuale?

Lo sconto reale è stato $80 - 60 = 20$ Euro

Quindi, rapportando lo sconto reale moltiplicato per 100 al prezzo originale, avremo

$$\frac{20 \cdot 100}{80} = 25$$

Lo sconto praticato è stato quindi del 25%.

Nella vetrina di una profumeria leggiamo sulla confezione di un profumo: sconto del 16% si risparmiano 8 Euro. Qual era il prezzo di listino?

Dividiamo lo sconto effettivo moltiplicato per 100 per la percentuale

$$\frac{8 \cdot 100}{16} = 50$$

Il prezzo di listino era di 50 Euro

HAI IMPARATO CHE ...

1. I numeri naturali servono sia per *contare* che per *ordinare*, infatti essi hanno due aspetti: **ordinale** e **cardinale**
2. I numeri naturali possono essere rappresentati disponendoli a intervalli uguali lungo una semiretta orientata con origine nello zero
3. I numeri naturali sono infiniti: a partire dallo zero ogni numero naturale si costruisce aggiungendo uno al **precedente**. Ogni numero naturale ha sempre il suo **successivo**.
4. È sempre possibile confrontare i numeri naturali. Infatti dati due qualunque numeri naturali, sussiste tra loro una e una sola delle seguenti relazioni:
 - a. i due numeri naturali sono uguali, **$a = b$** , se occupano la stessa posizione sulla retta
 - b. il primo è maggiore del secondo **$a > b$** , se a viene dopo di b sulla retta
 - c. il secondo è minore del primo **$b < a$** , se b viene prima di a sulla retta
5. Gli **elementi** delle quattro operazioni si chiamano
 - d. addendi e il risultato somma, per l'addizione
 - e. fattori e il risultato prodotto, per la moltiplicazione
 - f. rispettivamente minuendo, sottraendo e il risultato differenza, per la sottrazione
 - g. rispettivamente dividendo, divisore e il risultato quoziente, per la divisione
6. Si dice che la somma e la moltiplicazione sono **operazioni interne** in \mathbb{N} . Se sottraiamo o dividiamo due numeri naturali, non sempre invece è possibile avere come risultato un numero naturale. Il risultato di una sottrazione è un numero naturale se e solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo. Il risultato della divisione è un numero naturale se e solo se il dividendo è un multiplo del divisore. Il risultato si chiama quoziente esatto
7. Esiste l'**elemento neutro** per la moltiplicazione e per l'addizione e sono rispettivamente **1** e **0**
8. Le **proprietà** delle operazioni sono:
 - h. per l'addizione: proprietà commutativa, proprietà associativa
 - i. per la moltiplicazione: proprietà commutativa, proprietà associativa, proprietà distributiva rispetto alla somma e alla differenza
 - j. per la sottrazione: proprietà invariantiva
 - k. per la divisione: proprietà invariantiva, proprietà distributiva rispetto alla somma e alla differenza
9. Dati due numeri naturali **a** e **n** diversi da zero elevare a **potenza** il numero **a** vuol dire moltiplicarlo per se stesso tante volte quanto vale l'esponente **n**
10. L'elevamento a potenza dei numeri naturali gode di alcune **proprietà**
 - il prodotto di due potenze di ugual base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
 - il quoziente di due potenze di ugual base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti $a^n : a^m = a^{n-m}$, con $m > n$
 - la potenza di una potenza è uguale ad una potenza di ugual base elevata ad un esponente uguale al prodotto degli esponenti $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
 - il prodotto tra due o più potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
 - il quoziente tra due potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza avente per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente

I NUMERI INTERI RELATIVI

PREREQUISITI

Gli insiemi dei numeri naturali
Le operazioni con i numeri naturali
Massimo comun divisore tra due o più numeri naturali
Minimo comune multiplo tra due o più numeri naturali
Risoluzione di un' espressione tra numeri naturali

OBIETTIVI

Sapere

Conoscere i vari tipi di frazione
Conoscere le frazioni equivalenti
Conoscere le operazioni fondamentali nell'insieme dei numeri razionali
Conoscere i numeri decimali finiti e periodici
Conoscere le proporzioni
Conoscere le percentuali

Saper Fare

Saper confrontare due o più frazioni
Saper ridurre le frazioni ai minimi termini
Saper risolvere espressioni con le frazioni
Saper trasformare un numero decimale in una frazione
Saper trasformare una frazione in un numero decimale
Saper operare con le proporzioni
Saper operare con le percentuali

I numeri interi relativi

Introduzione

All' inizio di ogni nuovo anno si leggono sui giornali notizie del tipo:

“La società Digipop ha chiuso il 2006 con un bilancio di 7.000.000 euro”

L' informazione non è molto precisa, la domanda che ci si pone è:

La Digipop ha chiuso in attivo o in passivo?

Se il bilancio della digipop è attivo avrà chiuso con 7.000.000 euro in più rispetto al bilancio dell' anno precedente.

Se il bilancio della digipop è passivo avrà chiuso con 7.000.000 euro in meno rispetto al bilancio dell' anno precedente.

“...e ora le previsioni del tempo: domani la temperatura a Cenon sarà di 10°.

Analizziamo attentamente le frasi

In base alle stagioni si sente dire “ la temperatura è 30° sopra lo zero” oppure “la temperatura è scesa a 15° sotto lo zero”

In questi esempi e, numerosi altri, per indicare :

- la Digipop è in attivo si utilizza +7.000.000 euro
- la Digipop è in passivo si utilizza -7.000.000 euro
- la temperatura è 30° sopra lo zero , +30°
- la temperatura è scesa a .15° sotto lo zero”

In generale

i numeri preceduti dal segno **più**, vengono chiamati **numeri positivi**.

I numeri preceduti dal segno **meno**, vengono chiamati **numeri negativi**.

L'insieme contenente i numeri interi positivi, quelli interi negativi e il numero zero è detto

Insieme dei Numeri Interi Relativi e si indica con il simbolo **Z**

Rappresentazione grafica

I numeri relativi possono essere rappresentati su di una semiretta orientata con origine in O, che corrisponde allo zero, sulla quale sia stata fissata un'unità di misura.



L'insieme dei numeri relativi è infinito discreto

- Ogni numero relativo ha sempre il suo **successivo**.
- Ogni numero relativo, è sempre maggiore di tutti i numeri che lo precedono
- Ogni numero relativo è sempre minore di tutti i numeri che lo seguono

È sempre possibile confrontare i numeri relativi. Dati due qualunque numeri relativi **a** e **b**, sussiste tra loro una e una sola delle seguenti relazioni:

- i due numeri relativi sono uguali, **a = b**, se occupano la stessa posizione sulla retta
- il primo è maggiore del secondo **a > b**, se a viene dopo di b sulla retta
- il secondo è minore del primo **b < a**, se b viene prima di a sulla retta.

Il confronto tra numeri relativi rispetta le seguenti regole:

Se due numeri relativi sono entrambi positivi è minore quello che ha valore assoluto minore

$$+5 < +8 \Rightarrow |+5| < |+8|$$

Se due numeri relativi sono entrambi negativi è minore quello che ha valore assoluto maggiore

$$-8 < -5 \Rightarrow |-8| < |-5|$$

Ogni numero relativo negativo è minore di qualsiasi numero positivo $-5 < +8$

Lo zero 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo $0 < +8$ e $-5 > 0$

Valore Assoluto

Il valore assoluto di un numero **a** è il numero privato del proprio segno. Per indicare il valore assoluto (o modulo) si utilizza il seguente simbolo $|a|$.

+a se a è positivo

$|a| =$

-a se a è negativo

Esempio

Il valore assoluto di + 7 è 7 e si scrive:

$$|+7| = 7.$$

Le quattro operazioni

L'addizione

Definizione

La somma di due interi relativi concordi è un numero che ha:

- come valore assoluto la somma dei valori assoluti dei due numeri addendi
- come segno lo stesso dei due numeri

Esempi

$$(+4)+(+7)=+(4+7)=+11$$

$$(-5)+(-8)=- (5+8)=-13$$

Definizione

La somma di due interi relativi discordi è un numero che ha:

- come valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e il minore
- come segno quello del numero che ha valore assoluto maggiore.

Esempi

$$(+4) + (-7) = - (7-4) = -3$$

$$(-5) + (+8) = +(8-5) = +3$$

L'operazione di addizione è interna a \mathbb{Z} e inoltre valgono le proprietà commutativa, associativa e lo zero è l'elemento neutro.

Proprietà

Per ogni numero **a** ne esiste un secondo **b** tale che la loro somma è zero.

Definizione

Una coppia di numeri a e b si dicono opposti se e solo se la loro somma è zero.

$$a = -b \Leftrightarrow a + b = 0$$

La Sottrazione

Definizione

La differenza tra due numeri interi relativi si ottiene addizionando il minuendo con l'opposto del sottraendo.

Esempi

$$(+4) - (-7) = (+4) + (+7) = + (4 + 7) = +11$$

$$(5) - (+8) = (+5) + (-8) = - (8 - 5) = -3$$

Conclusione

Per sottrarre due numeri interi relativi si può procedere nel seguente modo:

- si tolgono le parentesi
- al sottraendo si cambia di segno.

Esempi

$$(+5) - (-10) = +5 + 10 = +15$$

$$(-13) - (-9) = -13 + 9 = -4$$

L'operazione di sottrazione nell'insieme dei numeri interi relativi Z è **interna**, mentre non lo è in N . Siccome l'operazione di sottrazione tra numeri interi relativi si può ricondurre all'addizione, si può parlare genericamente di **addizione algebrica**.

La Moltiplicazione

Definizione

Il prodotto di due numeri interi relativi è un numero intero che ha:

valore assoluto uguale al prodotto dei valori assoluti

segno positivo se i due fattori sono concordi

segno negativo se i due fattori sono discordi

La regola di moltiplicazione dei segni si può sintetizzare nella seguente tabella:

Moltiplicazione	+	-
+	+	-
-	-	+

Esempi

$$(+5) \cdot (-10) = -50$$

$$(-3) \cdot (-4) = +12$$

$$(+2) \cdot (+8) = +16$$

$$(-4) \cdot (+5) = -20$$

Se si moltiplicano fra loro più numeri, per determinare il segno del prodotto basta contare il numero dei fattori negativi:

- se sono in numero **dispari**, il prodotto sarà **negativo**
- se sono in numero **pari**, il prodotto sarà **positivo**

La moltiplicazione è un'operazione interna in \mathbb{Z} e valgono tutte le proprietà introdotte in \mathbb{N} .

La Divisione

Definizione

Il quoziente di due numeri interi relativi è un numero intero, se e soltanto se il dividendo è multiplo del divisore, che ha:

- valore assoluto uguale al quoziente dei valori assoluti
- segno positivo se dividendo e divisore sono concordi
- segno negativo se dividendo e divisore sono discordi

Esempi

$$(+25) : (-5) = -5$$

$$(-10) : (-2) = +5$$

Come nell'insieme dei numeri Naturali, anche nell'insieme dei numeri interi relativi \mathbb{Z} la divisione non è un'operazione interna.

Le potenze**Definizione**

La potenza ennesima di un numero intero relativo a , con esponente naturale, è un numero intero che ha:

- per valore assoluto la potenza del valore assoluto
- il segno negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari
- il segno positivo se la base è positiva, e se la base è negativa solo se l'esponente è pari

In sintesi:

Potenza	+
$(+a)^n = +a^n$	n pari
$(-a)^n = +a^n$	
$(+a)^n = +a^n$	n dispari
$(-a)^n = -a^n$	

Esempi

$$(-3)^5 = -243$$

$$(-3)^4 = +81$$

Essendo l'elevamento a potenza una particolare moltiplicazione, il segno della potenza dipende dal prodotto dei segni valida per l'operazione di moltiplicazione.

Esempi

$$(-3)^5 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -243$$

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

Attenzione

L' elevamento a potenza ha precedenza rispetto al segno. Se una potenza è scritta senza parentesi, l' elevamento a potenza è riferito solo al numero e non al segno.

Esempio

$$-4^2 = -16$$

Per le potenze tra numeri interi relativi valgono le proprietà delle potenze aventi ugual base e ugual esponente introdotte nell' insieme dei numeri naturali.

Esempi

$$(-2)^3 \cdot (-2)^5 = (-2)^8$$

$$(-2)^6 : (-2)^5 = -2$$

$$[(-2)^3]^3 = (-2)^9$$

$$(-2)^3 \cdot (-4)^3 = (8)^3$$

Per le espressioni con i numeri interi relativi valgono le considerazioni fatte a proposito dei numeri naturali.

HAI IMPARATO CHE ...

1. I numeri naturali servono sia per *contare* che per *ordinare*, infatti essi hanno due aspetti: **ordinale** e **cardinale**
2. I numeri naturali possono essere rappresentati disponendoli a intervalli uguali lungo una semiretta orientata con origine nello zero
3. I numeri naturali sono infiniti: a partire dallo zero ogni numero naturale si costruisce aggiungendo uno al **precedente**. Ogni numero naturale ha sempre il suo **successivo**.
4. È sempre possibile confrontare i numeri naturali. Infatti dati due qualunque numeri naturali, sussiste tra loro una e una sola delle seguenti relazioni:
 - l. i due numeri naturali sono uguali, **$a = b$** , se occupano la stessa posizione sulla retta
 - m. il primo è maggiore del secondo **$a > b$** , se a viene dopo di b sulla retta
 - n. il secondo è minore del primo **$b < a$** , se b viene prima di a sulla retta
5. Gli **elementi** delle quattro operazioni si chiamano
 - o. addendi e il risultato somma, per l'addizione
 - p. fattori e il risultato prodotto, per la moltiplicazione
 - q. rispettivamente minuendo, sottraendo e il risultato differenza, per la sottrazione
 - r. rispettivamente dividendo, divisore e il risultato quoziente, per la divisione
6. Si dice che la somma e la moltiplicazione sono **operazioni interne** in \mathbb{N} . Se sottraiamo o dividiamo due numeri naturali, non sempre invece è possibile avere come risultato un numero naturale. Il risultato di una sottrazione è un numero naturale se e solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo. Il risultato della divisione è un numero naturale se e solo se il dividendo è un multiplo del divisore. Il risultato si chiama quoziente esatto
7. Esiste l'**elemento neutro** per la moltiplicazione e per l'addizione e sono rispettivamente **1** e **0**
Le **proprietà** delle operazioni sono:
 - s. per l'addizione: proprietà commutativa, proprietà associativa
 - t. per la moltiplicazione: proprietà commutativa, proprietà associativa, proprietà distributiva rispetto alla somma e alla differenza
 - u. per la sottrazione: proprietà invariantiva
 - v. per la divisione: proprietà invariantiva, proprietà distributiva rispetto alla somma e alla differenza
8. Dati due numeri naturali **a** e **n** diversi da zero elevare a **potenza** il numero **a** vuol dire moltiplicarlo per se stesso tante volte quanto vale l'esponente **n**
L'elevamento a potenza dei numeri naturali gode di alcune **proprietà**
 - il prodotto di due potenze di ugual base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
 - il quoziente di due potenze di ugual base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti $a^n : a^m = a^{n-m}$, con $m > n$
 - la potenza di una potenza è uguale ad una potenza di ugual base elevata ad un esponente uguale al prodotto degli esponenti $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
 - il prodotto tra due o più potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
 - il quoziente tra due potenze aventi gli stessi esponenti è uguale ad una potenza

I NUMERI RAZIONALI

PREREQUISITI

Gli insiemi dei numeri naturali, interi relativi e razionali assoluti

Le operazioni con i numeri naturali, interi relativi e razionali assoluti

Massimo comun divisore tra due o più numeri naturali

Minimo comune multiplo tra due o più numeri naturali

Risoluzione di un' espressione tra numeri naturali, interi relativi e razionali assoluti

OBIETTIVI

Sapere

Conoscere le operazioni fondamentali nell'insieme dei numeri razionali

Saper Fare

Saper confrontare due o più frazioni

Saper ridurre le frazioni ai minimi termini

Saper risolvere espressioni con le frazioni

I numeri razionali

Introduzione

Un numero razionale è un numero ottenibile come rapporto tra due numeri interi **a**, **b**, il secondo dei quali diverso da 0. Ogni numero razionale quindi può essere espresso mediante una frazione $\frac{a}{b}$, di cui

a è detto il numeratore e **b** il denominatore. I numeri razionali formano un insieme, indicato con **Q**

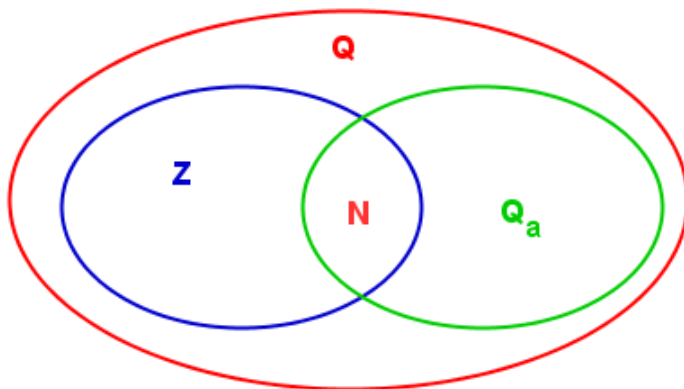
Il termine razionale deriva dal latino ratio, che significa calcolo o rapporto.

L'insieme dei numeri razionali **Q**, così come l'insieme **N** e **Z**, è un insieme **infinito** e **ordinato**, ma non è discreto, cioè: "dati due numeri razionali è sempre possibile trovare un numero razionale che segue il primo e precede il secondo, ovvero esiste sempre un numero razionale intermedio". In realtà di numeri intermedi ne esistono infiniti!

Tale fatto si esprime dicendo che l'insieme è **denso**.

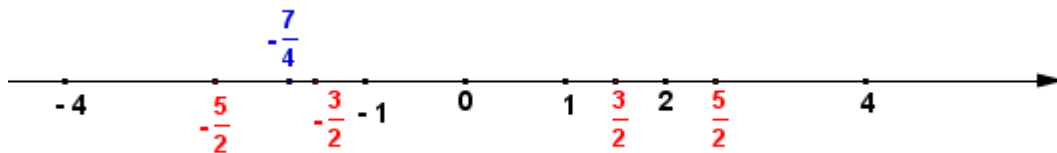
Rappresentazione grafica

L'insieme **Q** dei numeri razionali è un ampliamento dell'insieme dei numeri interi relativi. Ecco la visualizzazione attraverso il diagramma di Eulero-Venn



Q = insieme dei numeri razionali
Z = insieme dei numeri relativi interi
Q_a = insieme dei numeri razionali assoluti
N = insieme dei numeri naturali

I numeri razionali possono essere rappresentati su di una semiretta con origine in **O**, che corrisponde allo zero, sulla quale sia stata fissata un'unità di misura



Le Operazioni

Addizione

Definizione

La somma di due numeri razionali scritti come frazioni aventi lo stesso denominatore è un numero che ha:

- **come denominatore lo stesso denominatore**
- **come numeratore la somma dei numeratori se sono concordi, la differenza dei numeratori se sono discordi e avente segno del numero in valore assoluto maggiore**

Se le frazioni non hanno lo stesso denominatore si procede prima alla riduzione al medesimo denominatore e poi si procede come spiegato nella definizione.

Esempio

Svolgere la seguente somma $\frac{5}{4} + \left(-\frac{8}{5}\right)$

Calcoliamo il minimo comune multiplo tra (4, 5): m.c.m.= 20

$$\text{Otteniamo } \frac{5}{4} + \left(-\frac{8}{5}\right) = +\frac{5}{4} - \frac{8}{5} = \frac{+25-32}{20} = -\frac{7}{20}$$

Sottrazione

Definizione

La differenza tra due numeri razionali si ottiene addizionando al primo termine l'opposto del secondo. Tale operazione si riconduce all'addizione e si esegue con lo stesso metodo.

Esempio

Svolgere la seguente somma $\frac{1}{4} - \left(+\frac{8}{5}\right)$

Calcoliamo il minimo comune multiplo tra (4, 5): m.c.m.= 20

$$\text{Otteniamo } \frac{1}{4} - \left(+\frac{8}{5}\right) = +\frac{1}{4} - \frac{8}{5} = \frac{5-32}{20} = -\frac{27}{20}$$

L'addizione e la sottrazione di numeri razionali godono di tutte le proprietà di cui godono l'addizione e la sottrazione di numeri di numeri interi relativi. L'addizione e la sottrazione sono operazioni interne

Moltiplicazione

Definizione

Il prodotto di due numeri razionali espressi da frazioni è una frazione:

- **avente per numeratore il prodotto dei numeratori e come denominatore il prodotto dei denominatori**
- **con segno positivo se i due fattori sono concordi**
- **con segno negativo se i due fattori sono discordi**

Esempio

Svolgere la seguente moltiplicazione $\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$

Otteniamo $\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{20}$

La moltiplicazione è un'operazione interna in \mathbb{Q} e gode delle stesse proprietà di cui gode la moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi relativi

Definizione

Due numeri razionali non nulli si dicono reciproci l'uno dell'altro quando il loro prodotto è 1.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \text{ con } a \neq 0$$

Divisione

Definizione

La divisione tra due numeri razionali, con il divisore diverso da zero, è uguale al prodotto del dividendo per il reciproco del divisore.

Il quoziente ottenuto sarà:

- **positivo** se i due fattori sono **concordi**
- **negativo** se i due fattori sono **discordi**

Esempio

Svolgere la seguente divisione $\left(\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right)$

$$\text{Otteniamo } \left(\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{8}$$

La divisione è un'operazione interna in \mathbb{Q} e gode delle stesse proprietà di cui gode la moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi relativi

Attenzione

Non sempre la divisione tra numeri è possibile:

Se **dividendo e divisore sono nulli** l'operazione si dice **indeterminata**

Se il **divisore è uguale a zero a:0** è **impossibile** perché non esiste nessun numero che moltiplicato per zero possa ridare **a** (dividendo)

La divisione, inoltre, non gode della proprietà commutativa

Osserva:

$$\left(\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{8} \quad \text{mentre} \quad \left(-\frac{2}{5}\right) : \left(\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{15}$$

si ottengono due numeri **reciproci** tra loro

Potenza**Definizione**

La potenza ennesima di un numero razionale $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ è la frazione che ha per numeratore a^n e per denominatore b^n

Esempio

Svolgere la seguente potenza $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{4^3} = -\frac{27}{64}$$

Per le potenze valgono le stesse proprietà dei numeri interi relativi

Potenza con esponente negativo

Consideriamo la seguente espressione $5^3:5^5$ e scriviamola sotto forma di frazione

$$5^3:5^5 = \frac{5^3}{5^5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}$$

La frazione $\frac{1}{5^2}$ possiamo scriverla

$$\frac{1}{5^2} = \frac{5^0}{5^2} = 5^0:5^2 = 5^{-2} \quad \text{possiamo concludere che} \quad \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$$

Definizione

La potenza di un numero razionale diverso da zero, con esponente intero negativo è una potenza che per base il reciproco del numero dato e per esponente l'opposto dell'esponente

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Esempio

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\left(-\frac{6}{5}\right)^{-1} = \left(-\frac{5}{6}\right)^1 = -\frac{5}{6}$$

Espressioni con i numeri razionali

Per risolvere le espressioni valgono tutte le osservazioni fatte relative alle espressioni con i numeri naturali.

Esempio

Calcolare il valore della seguente espressione

$$\frac{3}{8} \left\{ -\frac{1}{3} + \left[-\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \right) - \frac{7}{3} \right] + \frac{3}{4} \right\} - 1 =$$

$$\frac{3}{8} \left\{ -\frac{1}{3} + \left[-\frac{4}{3} - \left(\frac{-2+5}{4} \right) - \frac{7}{3} \right] + \frac{3}{4} \right\} - 1 =$$

$$\frac{3}{8} \left\{ -\frac{1}{3} + \left[-\frac{4}{3} - \frac{3}{4} - \frac{7}{3} \right] + \frac{3}{4} \right\} - 1 =$$

$$\frac{3}{8} \left\{ -\frac{1}{3} + \left[\frac{-16-9-28}{12} \right] + \frac{3}{4} \right\} - 1 = \frac{3}{8} \left\{ -\frac{1}{3} + \left[\frac{-53}{12} \right] + \frac{3}{4} \right\} - 1 = \frac{3}{8} \left\{ \frac{-4-53+9}{12} \right\} - 1 =$$

$$\frac{3}{8} \left\{ -\frac{48}{12} \right\} - 1 = \frac{3}{8} \{-4\} - 1 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

Sezione 2. Calcolo letterale

I monomi

I polinomi

Scomposizione di polinomi

Divisione tra polinomi

Frazioni Algebriche

I MONOMI

PREREQUISITI

Calcolo algebrico

OBIETTIVI

Sapere

Conoscere i monomi

Conoscere i monomi particolari

Conoscere le operazioni tra i monomi

Saper Fare

Saper determinare il grado di un monomio

Saper distinguere monomi simili e uguali

Saper sommare i monomi

Saper moltiplicare i monomi

Saper dividere i monomi

Saper elevare a potenza un monomio

Saper risolvere espressioni con i monomi

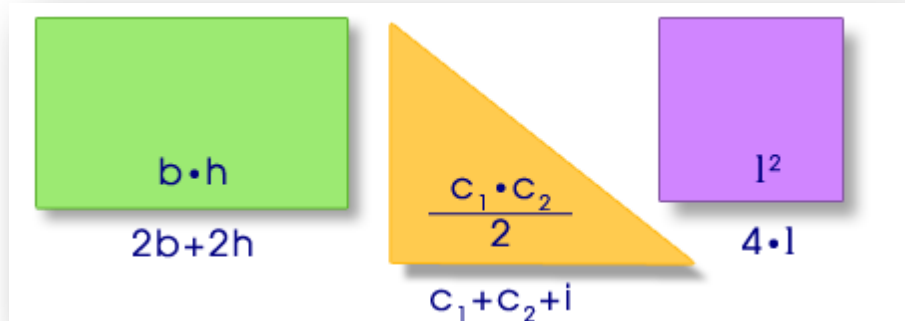
I Monomi

Introduzione

Sicuramente hai riconosciuto le formule per il calcolo dell'area e del perimetro di alcune figure geometriche.

Analizziamole con attenzione

Per calcolare il **perimetro** del rettangolo, del triangolo rettangolo o del quadrato noi utilizziamo le formule:



$$2p = 2b + 2h;$$

$$2p: c_1 + c_2 + i;$$

$$2p = 4l$$

Per calcolare l'**area** delle medesime figure utilizziamo le seguenti formule:

$$A = b \cdot h; \quad A = c_1 \cdot c_2; \quad A = l^2$$

In entrambi i casi, note le misure dei lati della figura e sostituendo nella formula otterremo un valore noto che esprimerà o il suo perimetro o la sua area.

Queste formule, algebricamente, vengono chiamate **espressioni algebriche letterali** o espressione letterali.

Definizione

Si dice **espressione algebrica letterale** o **espressione letterale** qualsiasi espressione che indichi operazioni da eseguire su numeri o lettere date.

Se le operazioni da svolgere sono solo addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza con esponente intero tali espressioni prendono il nome di **espressioni letterali razionali**.

Tra le espressioni letterali la più semplice è il **monomio**.

Definizione

Si dice **Monomio** un' **espressione letterale razionale** in cui figura solo la **operazione di moltiplicazione tra fattori numerici razionali e la parte letterale**.

Esempio

Sono esempi di monomi le espressioni:

$$3xy; \quad \frac{2}{3}x^3y^2z; \quad -2abc;$$

Monomi ridotta a forma normale

Data l'espressione letterale razionale

$$2 \cdot b \cdot \frac{5}{3} \cdot a \cdot b \cdot 3 \cdot a$$

Applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione possiamo raggruppare la parte numerica e quella letterale, ottenendo

$$2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$$

Semplifichiamo, moltiplichiamo e otteniamo: $10 \cdot a^2 b^2$
un **monomio ridotto a forma normale**.

The diagram illustrates the simplification process in three steps:

- $2 \cdot b \cdot \frac{5}{3} \cdot a \cdot b \cdot 3 \cdot a$
- $2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$
- $2 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$

Labels: "fattore numerico" (circled in red) and "parte letterale" (circled in blue). The final result is $10 a^2 b^2$.

Definizione

Un **Monomio** è ridotto a forma normale quando è composto dal prodotto di un **unico fattore numerico detto coefficiente**, con potenze letterali aventi basi diverse detta **parte letterale**.

Esempi

$$\frac{2}{3}x^2; 3ab^3; -\frac{4}{5}xyz^4$$

Se il coefficiente di un monomio è zero, il **monomio** si dice **nullo**.

Monomi simili, uguali e opposti

Definizione

Due monomi si dicono **uguali** se hanno uguali sia i coefficienti numerici sia la parte letterale

Due monomi si dicono **opposti** se hanno stessa parte letterale e coefficienti opposti

Esempio

Sono monomi opposti $3ab^2c$; $-3ab^2c$

Definizione

Due monomi si dicono **simili** se hanno uguale solo la parte letterale

Esempio

Sono monomi simili $4ab^2c$; $-5ab^2c$

Grado di un monomio

Definizione

Si dice **grado relativo** di un monomio rispetto a una singola lettera l'esponente con cui questa lettera vi compare.

Esempio

Il monomio $2a^3b^4c$ è di:

- 3° grado rispetto alla lettera a
- 4° grado rispetto alla lettera b
- 1° grado rispetto alla lettera c

Monomio di grado zero

Un numero è un monomio di grado zero.

Infatti $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^0b^0 \dots$

Si dice **grado complessivo** di un monomio la somma degli esponenti di tutte le lettere.

Esempio

Il monomio $2a^3b^4c$ ha grado 8

Operazioni con i monomi

Addizione e sottrazione

Consideriamo la seguente espressione: $(3 + 5)ab$ applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, si ottiene:

$$(3 + 5)ab = 3ab + 5ab$$

Sappiamo che l'uguaglianza è una relazione di equivalenza e gode della proprietà simmetrica quindi, possiamo leggere l'uguaglianza da destra verso sinistra e si ottiene la somma di due monomi simili:

$$3ab + 5ab = (3 + 5)ab = 8ab$$

Consideriamo adesso la differenza tra due monomi simili. Ripetendo il ragionamento precedente si ottiene:

$$9ab - 5ab = (9 - 5)ab = 4ab$$

Definizione

La somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati e avente come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempi

Calcolare la somma dei due monomi $\frac{3}{2}a^3b$; $-5a^3b$.

$$\frac{3}{2}a^3b + (-5a^3b) = \frac{3}{2}a^3b - 5a^3b = \left(\frac{3}{2} - 5\right)a^3b = \frac{3-10}{2}a^3b = -\frac{7}{2}a^3b$$

Calcolare la differenza dei due monomi $\frac{3}{2}a^3b$; $-5a^3b$.

$$\frac{3}{2}a^3b - (-5a^3b) = \frac{3}{2}a^3b + 5a^3b = \left(\frac{3}{2} + 5\right)a^3b = \frac{3+10}{2}a^3b = \frac{13}{2}a^3b$$

Somma di monomi opposti

La somma di due monomi opposti è sempre uguale a zero

$$2ab + (-2ab) = 2ab - 2ab = 0$$

Moltiplicazione tra monomi

Consideriamo il seguente prodotto tra monomi: $(3xy) \cdot \left(\frac{4}{9}xy^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)$.

Applichiamo la proprietà dissociativa e commutativa della moltiplicazione e otteniamo:

$$(3xy) \cdot \left(\frac{4}{9}xy^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} x \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot y^2$$

Applichiamo la proprietà associativa della moltiplicazione e quella del prodotto di potenze aventi uguale base e otteniamo:

$$3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} x \cdot x \cdot x^2 \cdot y \cdot y^2 = \frac{2}{3} x^4 y^3$$

Definizione

Il prodotto tra due o più monomi è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto di tutti i fattori letterali.

Esempi

Calcolare la seguente moltiplicazione tra monomi $2ab \cdot \left(\frac{5}{4}ab^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{25}ab\right)$

$$2ab \cdot \left(\frac{5}{4}ab^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{25}ab\right) = \frac{2 \cdot 5 \cdot (-2)}{4 \cdot 25} a^2 b^2 \cdot ab = -\frac{1}{5} a^3 b^3$$

Potenza di un monomio

L'elevamento a potenza è un caso particolare del prodotto di monomi. Per definizione di potenza e per la proprietà della potenza di una potenza si ottiene:

$$(3x^2y)^3 = 3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y)^3 = 27x^6y^3$$

Definizione

Per elevare a potenza ennesima un monomio, si eleva a quella potenza sia il coefficiente sia ogni fattore della parte letterale.

Quoziente di due monomi

Consideriamo il seguente quoziente tra due monomi: $\left(\frac{4}{9}x^2y^2\right) : \left(\frac{1}{2}x^2\right)$. Otteniamo

$$\left(\frac{4}{9}x^2y^2\right) : \left(\frac{1}{2}x^2\right) = \left(\frac{4}{9} : \frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 : x^2) \cdot y^2 = \frac{8}{9}y^2$$

Per la parte letterale si applica la proprietà del quoziente tra due potenze aventi ugual base.

Definizione

Il quoziente tra due monomi è un monomio avente come coefficiente il quoziente dei coefficienti del dividendo e del divisore, e per parte letterale il quoziente tra i fattori letterali del dividendo e del divisore.

La divisione tra due monomi uguali è sempre uguale a 1.

La divisione tra due monomi opposti è sempre uguale a -1.

Massimo Comun Divisore tra monomi

Si può estendere il concetto di M.C.D. tra numeri e applicarlo anche ai monomi.

Definizione

Il M.C.D. di più monomi è quel monomio di grado massimo che divide contemporaneamente tutti i monomi dati, avente come coefficiente il M.C.D. tra i coefficienti

Per determinarlo si procede nel seguente modo:

Coefficiente numerico

- si calcola il M.C.D. tra i coefficienti numerici se, sono tutti interi. Se i coefficienti non sono interi si prende come M.C.D. 1

Parte letterale

- è il prodotto di tutti i fattori letterali comuni ai monomi dati, presi ciascuno una sola volta con il minimo esponente

Esempio

Il M.C.D tra $(12x^4y^3t; 4x^2y^4t^2; 8x^2y^2t)$ è $4x^2y^2t$

Minimo Comune Multiplo tra monomi

Si può estendere il concetto di m.c.m. tra numeri e applicarlo anche ai monomi.

Definizione

Il m.c.m. di più monomi è quel monomio di grado massimo che sia divisibile contemporaneamente da tutti i monomi dati, avente come coefficiente il m.c.m. tra i coefficienti.

Per determinarlo si procede nel seguente modo:

Coefficiente numerico

- si calcola il m.c.m. tra i coefficienti numerici se, sono tutti interi. Se i coefficienti non sono interi si prende come m.c.m. 1

Parte letterale

- è il prodotto di tutti i fattori letterali comuni e non comuni ai monomi dati, presi ciascuno una sola volta con il massimo esponente

Esempio

Il m.c.m. tra $(12x^4y^3t; 4x^2y^4t^2; 8x^2y^2t)$ è $24x^4y^4t^3$

Espressioni con i monomi

Per risolvere espressioni contenente diverse operazioni con i monomi si devono rispettare tutte le regole viste per le espressioni numeriche, sulla priorità delle operazioni o sull'uso delle parentesi.

Esempio

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}ab\right)\left(-\frac{3}{2}ab^2\right) - a^2b^2\left(-\frac{1}{2}b\right) + \left(-\frac{1}{3}b^3\right)(2a^2) = \\ & = -\frac{3}{4}a^2b^3 + \frac{1}{2}a^2b^3 - \frac{2}{3}a^2b^3 = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)a^2b^3 = \\ & = -\frac{11}{12}a^2b^3 \end{aligned}$$

HAI IMPARATO CHE ...

1. Un monomio è un' espressione algebrica composta da un coefficiente numerico e da una parte letterale
2. Due o più monomi sono simili quando hanno la stessa parte letterale
3. Due o più monomi sono uguali quando hanno lo stesso coefficiente numerico e medesima parte letterale
4. Il grado relativo di un monomio rispetto ad una lettera è determinato dall' esponente della lettera medesima
5. Il grado assoluto di un monomio è determinato dalla somma degli esponenti di tutta la parte letterale
6. La somma algebrica tra monomi è possibile solo se essi sono simili tra loro.
7. La somma di due o più monomi è un monomio avente come coefficiente numerico la somma dei coefficienti e medesima parte letterale dei monomi addendi.
8. La differenza di due o più monomi è un monomio avente come coefficiente numerico la differenza dei coefficienti e medesima parte letterale dei monomi addendi.
9. Il prodotto tra due o più monomi è un monomio avente come coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti numerici dei singoli monomi e per parte letterale il prodotto delle parti letterali, applicando la proprietà delle potenze aventi ugual base.
10. Il quoziente tra due monomi è un monomio avente come coefficiente numerico il quoziente dei coefficienti numerici dei singoli monomi e per parte letterale il quoziente delle parti letterali, applicando la proprietà delle potenze aventi ugual base.
11. Per elevare a potenza un monomio si eleva a potenza sia il coefficiente numerico e sia la parte letterale . Per la parte letterale si applica la proprietà della potenza di una potenza.
12. Il M.C.D. tra due o più monomi è un monomio composto da un coefficiente numerico, massimo comun divisore dei coefficienti dei monomi dati, e da una parte letterale, massimo comun divisore delle parti letterali.
13. Il m.c.m tra due o più monomi è un monomio composto da un coefficiente numerico, minimo comune multiplo dei coefficienti dei monomi dati, e da una parte letterale, minimo comune multiplo delle parti letterali.

I POLINOMI

PREREQUISITI

Calcolo algebrico
I monomi e le operazioni tra monomi

OBIETTIVI

Sapere

Definire e riconoscere un polinomio
Conoscere il grado di un polinomio
Conoscere le operazioni con i polinomi
Conoscere i prodotti notevoli

Saper Fare

Saper calcolare il grado di un polinomio
Saper sommare polinomi
Saper moltiplicare polinomi e monomi con polinomi
Saper dividere un monomio con un polinomio
Saper applicare i prodotti notevoli
Saper svolgere espressioni con i polinomi

I Polinomi

Introduzione

Definizione

Si chiama polinomio un'espressione algebrica formata dalla somma di più monomi detti termini del polinomio.

Si dice che un polinomio è ridotto in **forma normale** quando non ha termini simili. In particolare un polinomio viene detto:

- **binomio**, se è formato da due termini
- **trinomio**, se contiene solo tre termini
- **quadrinomio**, se contiene quattro termini.

Esempi

$ab - x^2y$ rappresenta un binomio
 $a + b - x^2y$ rappresenta un trinomio

Definizione

Si chiama **grado complessivo** di un polinomio ridotto in forma normale il maggiore fra i gradi dei suoi termini

Esempio

$2a^3b^4 + 3a^4b^5 + 7a^7$ è un polinomio di **nono** grado

Definizione

Si chiama **grado di un polinomio rispetto ad una lettera** l' esponente maggiore con cui quella lettera compare.

Esempio

$2a^3b^4 + 3a^4b^5 + 7a^7$ è un polinomio di **settimo** grado rispetto alla lettera **a** e di **quinto** grado rispetto alla lettera **b**

Proprietà dei polinomi

Definizione

Un polinomio si dice **ordinato** secondo le potenze decrescenti di una variabile quando, i suoi termini sono ordinati in modo che gli esponenti della variabile considerata sono in ordine decrescente.

Esempio

Il polinomio $a^5 - a^3 + a^2b - ab + 1$ è di quinto grado rispetto alla lettera **a** ed è ordinato rispetto ad **a**.

Un polinomio si dice **completo** rispetto a una variabile quando contiene tutte le potenze di quella variabile dal grado massimo fino al grado zero.

Esempio

Il polinomio $a^5 - a^3 + a^2b - ab + 1$ è di quinto grado rispetto alla lettera **a** ed è ordinato rispetto ad **a**, ma, non è completo perché manca il termine in **a** di quarto grado

Il polinomio $a^5 - 2a^4 + a^3 + a^2b - ab + 1$ è completo e di quinto grado rispetto alla lettera **a**.

Un polinomio ridotto in forma normale si dice **omogeneo** se i suoi termini hanno tutti lo stesso grado.

Esempio

Il polinomio $5a^2b^3 - ab^4 + a^5 + b^5$ è un polinomio omogeneo di 5° grado.

Due polinomi si dicono **opposti** se sono composti dagli stessi termini ma, di segno opposto.

Due polinomi si dicono **uguali** se sono composti dagli stessi termini.

Esempio

Il polinomio $5a^2b^3 - ab^4 + a^5 + b^5$ e $-5a^2b^3 + ab^4 - a^5 - b^5$ sono opposti.

Operazioni con i polinomi

Addizione e sottrazione tra polinomi

Esempio

Determinare la somma dei seguenti polinomi $(2x^3 + 4x^2 - 7x)$ e $(3x^2 - 5x^3 + 3x^2 + 6x)$.
Per indicare la loro somma mettiamo i polinomi tra parentesi tonde separati dal segno +.
Togliamo le parentesi e cerchiamo, se esistono i monomi simili.

$$(2x^3 + 4x^2 - 7x) + (3x^2 - 5x^3 + 3x^2 + 6x) = 2x^3 + 4x^2 - 7x + 3x^2 - 5x^3 + 3x^2 + 6x =$$

Sommiamo algebricamente i monomi simili. Si ottiene un polinomio somma dei polinomi dati.

$$2x^3 + 4x^2 - 7x + 3x^2 - 5x^3 + 3x^2 + 6x = -3x^3 + 7x^2 - x$$

Generalizziamo

Per **sommare** due o più polinomi bisogna procedere nel seguente modo:

- sommare al primo polinomio il secondo polinomio
- cercare gli eventuali monomi simili
- sommare i monomi simili
- il polinomio ottenuto è la somma dei polinomi dati

Esempio

Determinare la differenza tra i seguenti polinomi $3x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x$ e $5x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 6x$.
Per indicare la loro differenza mettiamo i polinomi tra parentesi tonde separati dal segno -.
Togliamo le parentesi e, cambiamo di segno al polinomio racchiuso tra parentesi e proceduto dal segno meno.

$(3x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x) - (5x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 6x) = 3x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x - 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x$
Cerchiamo, se esistono i monomi simili. Sommiamo algebricamente i monomi simili.
Si ottiene un polinomio differenza dei polinomi dati.

$$3x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x - 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x = -2x^4 - 5x^3 - x^2 - 8x$$

Generalizziamo

Per **sottrarre** due polinomi bisogna procedere quindi, nel seguente modo:

- sommare al primo polinomio il secondo polinomio con i termini cambiati di segno
- cercare gli eventuali monomi simili
- sommare algebricamente i monomi simili
- il polinomio ottenuto è la differenza dei polinomi dati

Moltiplicazione tra un monomio e un polinomio

Consideriamo la moltiplicazione tra il monomio e il polinomio

$$3ab (2a^2b^3 - 7ab^2 + 2) =$$

Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$3ab (2a^2b^3 - 7ab^2 + 2) =$$

$$6a^3b^4$$

Moltiplichiamo il monomio $3ab$ per il primo termine del polinomio

$$3ab (2a^2b^3 - 7ab^2 + 2) =$$

$$6a^3b^4 - 21a^2b^3$$

Moltiplichiamo il monomio $3ab$ per il secondo termine del polinomio

$$3ab (2a^2b^3 - 7ab^2 + 2) =$$

$$6a^3b^4 - 21a^2b^3$$

Moltiplichiamo il monomio $3ab$ per il terzo termine del polinomio

$$3ab (2a^2b^3 - 7ab^2 + 2) =$$

$$6a^3b^4 - 21a^2b^3 + 6ab$$

Il risultato della moltiplicazione è:

$$3ab (2a^2b^3 - 7ab^2 + 2) =$$

$$6a^3b^4 - 21a^2b^3 + 6ab$$

Definizione

Il prodotto tra monomio e un polinomio è un polinomio ottenuto moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio.

Esempio

$$-\frac{3}{2}xy^2(2x + 3y) = 3x^2y^2 - \frac{9}{2}xy^3$$

Moltiplicazione tra due polinomi

Il prodotto di due polinomi si determina applicando due volte la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Esempio

Consideriamo la seguente moltiplicazione $(x + y)(3a + b + c)$.

Poniamo $A = (x + y)$, sostituiamo e moltiplichiamo il monomio A per il polinomio $(3a + b + c)$.

$$(x + y)(3a + b + c) = A(3a + b + c) = 3Aa + 3Ab + 3Ac$$

Sostituiamo al posto di A il polinomio $(x + y)$ e otteniamo:

$$(x + y)(3a + b + c) = 3a(x + y) = A(3a + b + c) = 3Aa + 3Ab + 3Ac = 3a(x + y) + 3b(x + y) + c(x + y)$$

Applichiamo, nuovamente, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$(x + y)(3a + b + c) = 3a(x + y) = A(3a + b + c) = 3Aa + 3Ab + 3Ac = 3a(x + y) + 3b(x + y) + c(x + y) = 3ax + 3ay + 3bx + 3by + cx + cy$$

Conclusione

$$(x + y)(3a + b + c) = 3ax + 3ay + 3bx + 3by + cx + cy$$

Definizione

Il prodotto tra due polinomi è un polinomio che ha per termini il prodotto di ciascun termine del primo polinomio per ogni termine del secondo polinomio.

Esempio

$$(3x - 2y)(x^2 + 2y) = 3x^3 + 6xy - 2x^2y - 4y^2$$

Divisione tra un monomio e un polinomio

Per dividere un polinomio per un monomio si applica la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma algebrica, dividendo ogni termine del polinomio per il monomio.

Esempio

$(24x^4 - 8x^2 + 4x - 2) : (2x^2)$. Applicando le proprietà distributive dividiamo ogni termine del polinomio per il divisore.

Per la parte letterale si applica la proprietà del quoziente di due potenze aventi uguale base.

Otteniamo

$$(24x^4 - 8x^2 + 4x - 2) : (2x) = 12x^3 - 4x^2 + 2x - 1.$$

Prodotti Notevoli

Quadrato di un binomio

I caso)

Quadrato della somma di due monomi

Consideriamo $(a+b)^2$. Per definizione di potenza possiamo scrivere:

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$ moltiplichiamo i due polinomi e otteniamo

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=\mathbf{a^2+2ab+b^2}$$

Definizione

Il quadrato della somma di due monomi è uguale al quadrato del primo monomio, più il doppio prodotto del primo monomio per il secondo, più il quadrato del secondo monomio.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dimostrazione geometrica

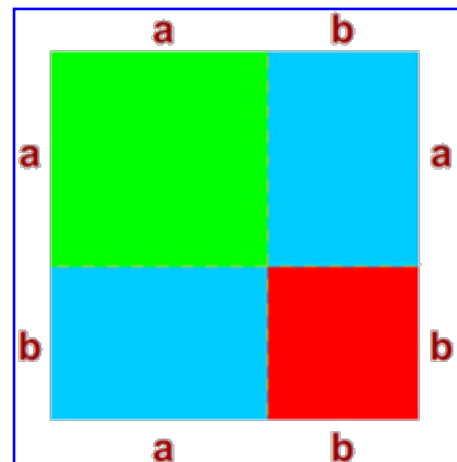
Costruiamo un quadrato di lato $a + b$: la sua area si determina facendo il quadrato del lato, cioè $(a+b)^2$.

Si possono individuare:

- un quadrato di lato a e area a^2
- due rettangoli di lati a e b e area $a \times b$
- un quadrato di lato b e area b^2

Sommando le singole aree, otteniamo

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



II caso)

Quadrato della differenza di due monomi

Consideriamo $(a-b)^2$. Per definizione di potenza possiamo scrivere:

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$ moltiplichiamo i due polinomi e otteniamo

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=\mathbf{a^2-2ab+b^2}$$

Definizione

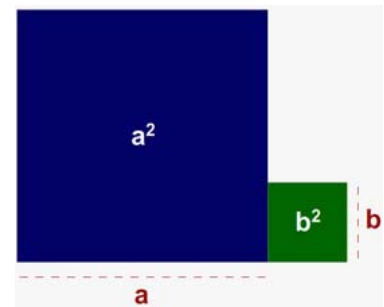
Il quadrato della differenza di due monomi è uguale al quadrato del primo monomio, meno il doppio prodotto del primo monomio per il secondo, più il quadrato del secondo monomio.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

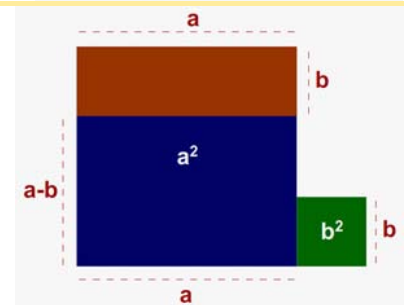
Dimostrazione geometrica

Costruiamo un quadrato di lato a e un quadrato di lato b .

La somma delle loro aree sarà pari a $a^2 + b^2$.



Sottraiamo al quadrato di lato a il valore di un rettangolo di base a e altezza b .

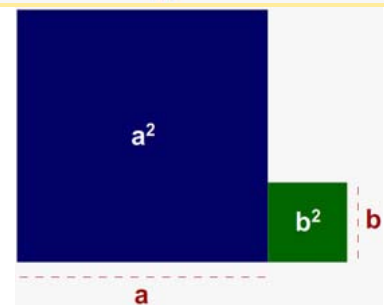


Togliamo da queste due figure un altro rettangolo di base a e altezza b .

Rimane un quadrato di lato $a - b$ il cui valore è quindi: $(a-b)^2$.

Possiamo affermare che

$$a^2 + b^2 - ab - ab = (a - b)^2$$



Esempi

$$(x+2y)^2 = x^2 + 2(x)(2y) + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$(2a-3b)^2 = 4a^2 + 2(2a)(-3b) + (-3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$$

$$(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$$

$$(x-3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$$

Quadrato di un polinomio

Consideriamo il quadrato del trinomio $(\mathbf{a+b+c})^2$. Per definizione di potenza possiamo scrivere:

$(\mathbf{a+b+c})^2=(a+b+c)(a+b+c)$ moltiplichiamo i due polinomi

$$(\mathbf{a+b+c})^2=(a+b+c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2= \mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

Definizione

Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini del polinomio e dei doppi prodotti di ciascun termine per ognuno di quelli che lo seguono.

$$(\mathbf{a+b+c})^2 = \mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

I termini al quadrato saranno sempre positivi mentre i segni dei doppi prodotti dipenderanno dai segni dei due termini coinvolti: se i termini sono concordi il loro doppio prodotto avrà segno + altrimenti avrà segno -.

Esempi

$$(x+2y+1)^2=x^2+(2y)^2+1+2(x)(2y)+2x+2(2y)=x^2+y^2+1+4xy+2x+4y$$

$$(2a-3b-c)^2=4a^2+9b^2+c^2-12ab-4ac+6bc$$

$$(a+2b-2)^2=a^2+4b^2+4+4ab-4a-8b$$

Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

Consideriamo il prodotto tra la somma di due monomi $(a+b)$ e la loro differenza $(a-b)$.

$$(\mathbf{a+b})(\mathbf{a-b})=a^2-ab+ba-b^2=\mathbf{a^2-b^2}$$

Definizione

Il prodotto tra la somma di due monomi e la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo.

$$(\mathbf{a+b})(\mathbf{a-b})= \mathbf{a^2-b^2}$$

Esempi

$$(x+2y)(x-2y)=x^2-(2y)^2=x^2-4y^2$$

$$(2a-3b)(2a+3b)=4a^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$$

$$(a+2b)(a-2b)=a^2-4b^2$$

$$(x-3y)(x+3y)=x^2-9y^2$$

$$(a^m-b^m)(a^m+b^m)=a^{2m}-b^{2m}$$

Cubo di un binomio

Consideriamo $(a+b)^3$, per svilupparlo possiamo scriverlo:

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=\mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Definizione

Il cubo di un binomio è un quadrinomio composto dalla somma del cubo del primo monomio, del triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, dal triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo, dal cubo del secondo monomio.

$$(a+b)^3= \mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Esempi

$$(x+2y)^3=x^3+3(x)^2(2y)+3x(2y)^2+y^3=x^3+6x^2y+12xy^2+y^3$$

$$(2a-3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(-3b)+3(2a)(-3b)^2+(-3b)^3=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$$

$$(a+2b)^3=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$$

$$(x-3y)^3=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$$

Potenza di un binomio

Consideriamo le seguenti potenze di un binomio, a noi note:

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

e le potenze successive?

$$\text{Calcoliamo } (a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Tutte le potenze successive le possiamo determinare operando in modo analogo. Possiamo quindi riscrivere la nostra tabella e otteniamo

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

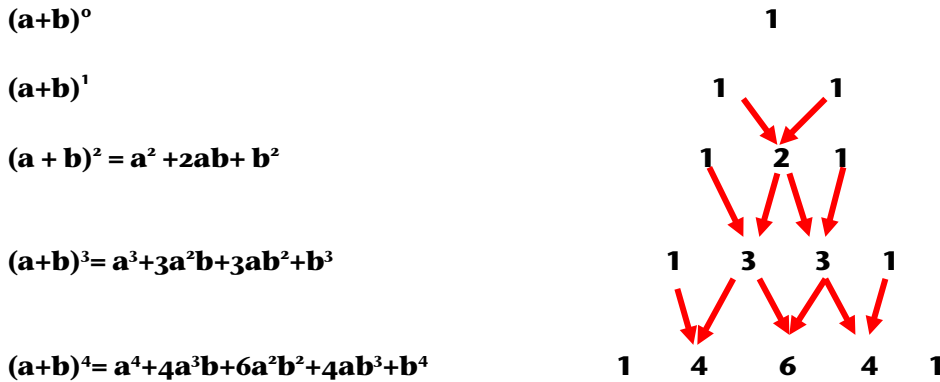
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

.....

Osserviamo con attenzione gli sviluppi delle potenze che abbiamo calcolato, possiamo notare che:

- ogni sviluppo ha un termine in più del precedente
- i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono uguali
- se a e b sono monomi di I grado sviluppando la potenza si ottiene sempre un polinomio omogeneo completo

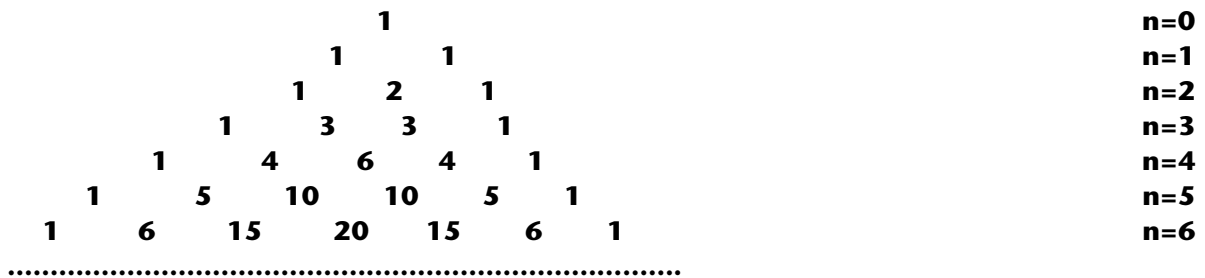
Vediamo ora come si possono determinare i coefficienti di $(a+b)^n$ partendo dall'elevamento a zero.



Il triangolo si ottiene nel seguente modo:

i numeri di ogni riga, a partire dalla terza, si ottengono sommando i due sovrastanti della riga precedente, come indicato dalle frecce.

Il **Triangolo di Tartaglia**, che si ottiene aggiungendo delle righe e il seguente:



Nel caso in cui si debba sviluppare $(a-b)^n$, siccome vale l'uguaglianza

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n$$

basta sostituire nello sviluppo al posto di b (-b) e, in questo caso i segni dei termini risulteranno alternati.

Esempio

$$(x+2y)^4 = x^4 + 4(x)^3(2y) + 6(x)^2(2y)^2 + 4(x)(2y)^3 + (2y)^4 = x^4 + 12x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

HAI IMPARATO CHE ...

1. Un polinomio è un' espressione algebrica composta dalla somma algebrica di più monomi
2. Il grado relativo di un polinomio rispetto ad una lettera è determinato dall' esponente maggiore con cui compare la lettera medesima
3. Il grado assoluto di un polinomio è determinato dal grado massimo di uno dei suoi termini.
4. Un polinomio è omogeneo quando è composto da monomi aventi tutti lo stesso grado.
5. La somma di due o più polinomio è un polinomio composto dalla somma algebrica dei monomi simili.
6. La differenza di due polinomi è uguale al primo polinomio sommato al secondo con i segni dei suoi termini cambiati.
7. Il prodotto tra monomio e un polinomio è un polinomio ottenuto moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio.
8. Il quoziente tra un monomio e un polinomio è uguale al quoziente tra il monomio e ogni termine del polinomio.
9. La moltiplicazione tra due polinomi è uguale al prodotto tra ogni termine del primo polinomio e ogni termine del secondo polinomio.
10. Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine sommato al quadrato del secondo termine, sommato o sottratto al doppio prodotto tra il primo e il secondo termine.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ o } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

11. Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini del polinomio e dei doppi prodotti di ciascun termine per ognuno di quelli che lo seguono.

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

I termini al quadrato saranno sempre positivi mentre i segni dei doppi prodotti dipenderanno dai segni dei due termini coinvolti: se i termini sono concordi il loro doppio prodotto avrà segno + altrimenti avrà segno -.

12. Il prodotto tra la somma di due monomi e la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

13. Il cubo di un binomio è un quadrinomio composto dalla somma del cubo del primo monomio, del triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, dal triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo, dal cubo del secondo monomio.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI

PREREQUISITI

Conoscere le proprietà delle operazioni tra insiemi numerici
Conoscere i polinomi e i monomi
Conoscere le operazioni tra monomi e polinomi
Conoscere i prodotti notevoli
Saper operare con gli insiemi numerici
Saper operare con le operazioni tra monomi e polinomi
Saper applicare i prodotti notevoli

OBIETTIVI

Sapere

Conoscere i vari casi di scomposizione di un polinomio

Saper Fare

Saper scomporre in fattori primi un polinomio utilizzando i vari metodi
Saper calcolare il M.C.D e m.c.m. tra polinomi

Scomposizione di polinomi

Introduzione

In aritmetica abbiamo imparato a scomporre in fattori primi un numero cioè, a trasformarlo nel prodotto di più fattori primi tra loro.

La medesima operazione può essere utilizzata con i polinomi, si potrà quindi scomporre un polinomi nel prodotto di più fattori primi tra loro.

Definizione

Scomporre un polinomio in fattori primi vuol dire trasformarlo nel prodotto di altri polinomi, di grado inferiore a quello considerato, e monomi primi tra loro.

Non sempre un polinomio è scomponibile, in questo caso si dice che è irriducibile.

Un polinomio è irriducibile quando non è possibile scomporlo nel prodotto di polinomi di grado inferiore, in caso contrario si dice riducibile.

L'operazione di scomposizione di un polinomio la affronteremo considerando i coefficienti dei monomi solo numeri razionali.

Un polinomio non scomponibile nell'insieme dei numeri razionali (Q), potrebbe essere riducibile nell'insieme dei numeri reali (R).

Raccoglimento a fattore comune

Il raccoglimento a fattore comune utilizza la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla addizione.

Dato il monomio A e il polinomio (B+C) si ha

$$A(B + C) = AB + AC$$

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scriverla anche:

$$AB + AC = A(B + C)$$

Quest'ultima uguaglianza afferma che il polinomio $AB + AC$ è stato scomposto in $A(B + C)$ dove A è il monomio comune, cioè **il fattore comune**. A è quindi il divisore comune dei monomi che compongono il polinomio.

Esempio

Scomporre il polinomio $4x^2y^4 - 8x^4y^2$.

Il divisore comune dei monomi è $4x^2y^2$. Possiamo raccogliere tale fattore e moltiplicarlo per il quoziente che si ottiene dividendo i monomi che compongono il polinomio.

$$4x^2y^4 - 8x^4y^2 = 4x^2y^2(y^2 - 2x^2).$$

Conclusione

Per scomporre un polinomio raccogliendo a fattore comune bisogna:

- Cercare il M.C.D. tra i monomi che compongono il polinomio e si ottiene il fattore comune
- Dividere ogni termine del polinomio per il fattore comune trovato
- Scrivere il polinomio dato come prodotto tra il fattore comune e il polinomio quoziente ottenuto dalla divisione.

Raccoglimento a fattore parziale

Dato un polinomio che non ha alcun fattore comune, può verificarsi il caso che esistano dei fattori comuni tra gruppi di termini che lo compongono.

In questo caso si procede con il raccoglimento dei fattori comuni parziali e successivamente con il raccoglimento a fattore comune.

Esempio**Scomporre il polinomio $3x+3y+ax+ay$.**

Tra i termini $3x$ e ax esiste un fattore comune x e tra i termini $3y$ e ay esiste un fattore comune y . Possiamo quindi evidenziare i due fattori comuni e si ottiene

$$3x+3y+ax+ay=x(3+a)+y(3+a)$$

I due addendi hanno come fattore comune $a+3$, raccogliamo e otteniamo:

$$3x+3y+ax+ay=x(3+a)+y(3+a)=(a+3)(x+y)$$

Trinomio sviluppo del quadrato di un binomio

Sappiamo che $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scriverla anche:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Un trinomio di II grado formato dalla somma di due quadrati e dal doppio prodotto delle basi è uguale al quadrato della somma algebrica dei due monomi.

Come fare a riconoscerlo?

Bisogna:

- Individuare i quadrati di due monomi e le loro basi
- Calcolare il doppio prodotto delle basi e verificare che appaia nel trinomio

Esempio**Scomporre il trinomio $4x^2 - 12xy + 9y^2$.**

$4x^2$ è il quadrato di $2x$;

$9y^2$ è il quadrato di $3y$

Il loro doppio prodotto è $2(2x)(3y)=12xy$

Il polinomio può essere scomposto in due modi:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2 \text{ oppure } 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (3y - 2x)^2$$

Sviluppo del quadrato di un polinomio

Sappiamo che $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scriverla anche:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

Un polinomio formato dalla somma dei quadrati dei tre monomi e dal doppio prodotto delle basi di ciascun monomio per ogni successivo è uguale al quadrato della somma algebrica dei tre monomi.

Come fare a riconoscerlo?

- Individuare i quadrati dei tre monomi e le loro basi
- Calcolare il doppio prodotto delle basi di ciascun monomio con ogni successivo e verificare che appaia nel polinomio

Esempio

Scomporre il trinomio $4x^2 + 9y^2 + 1 + 12xy + 4x + 6y$.

$4x^2$ è il quadrato di $2x$;

$9y^2$ è il quadrato di $3y$

1 è il quadrato di 1

I doppi prodotti sono $2(2x)(3y)=12xy$; $2(2x)(1)=4x$; $2(3y)(1)=6y$

Il polinomio è scomposto in:

$$4x^2 + 9y^2 + 1 + 12xy + 4x + 6y = (2x + 3y + 1)^2$$

Differenza di due quadrati

Sappiamo che $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scriverla anche:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

La differenza di due quadrati è uguale al prodotto tra la somma delle basi e la loro differenza

Come fare a riconoscerlo?

Bisogna:

- Individuare i quadrati di due monomi
- Verificare che ci sia la differenza tra i quadrati

Esempio

Scomporre il trinomio $4x^2 - 9y^2$.

$4x^2$ è il quadrato di $2x$;

$9y^2$ è il quadrato di $3y$

Appare la differenza tra i due quadrati

Il binomio può essere scomposto in:

$$4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$$

Sviluppo del cubo di un binomio

Sappiamo che $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$. Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scriverla anche:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Il quadrinomio composto dalla somma o differenza dei cubi di due monomi e dal triplo prodotto tra il quadrato del primo monomio per il secondo e dal triplo prodotto tra il primo monomio e il quadrato del secondo è uguale alla somma algebrica dei due monomi elevati al cubo.

Come fare a riconoscerlo?

Bisogna:

- Individuare i cubi dei due monomi
- Individuare il triplo prodotto tra il quadrato del primo monomio e il secondo
- Individuare il triplo prodotto tra il primo monomio e il quadrato del secondo

Esempio

Scomporre il quadrinomio $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

x^3 è il cubo di x ;

$-27y^3$ è il cubo di $-3y$

$+27xy^2$ è il triplo prodotto tra il monomio x e il quadrato di $-3y$

$-9x^2y$ è il triplo prodotto tra il quadrato di x e il monomio $-3y$

Il binomio può essere scomposto in:

$$x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = (x - 3y)^3$$

Somma e differenza di due cubi

Consideriamo i prodotti $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ e $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Sviluppando otteniamo

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Conclusione

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad \text{Somma di due cubi}$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \text{Differenza di due cubi}$$

$(a^2 \mp ab + b^2)$ è detto **falso quadrato** perché il trinomio contiene i quadrati dei due monomi ma al posto del doppio prodotto c'è il loro prodotto cambiato di segno. Tale trinomio, inoltre, è irriducibile.

Applicando la proprietà simmetrica dell'uguaglianza otteniamo:

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

La somma di due cubi è uguale alla somma delle basi moltiplicata per il loro falso quadrato.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

La differenza di due cubi è uguale alla differenza delle basi moltiplicata per il loro falso quadrato.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Esempio

Scomporre il binomio $x^3 - 27y^3$

$$x^3 - 27y^3 = (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$$

Scomporre il binomio $x^3 + 8y^3$

$$x^3 + 8y^3 = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

Scomposizione particolare trinomio di II grado

Consideriamo il seguente prodotto

$$(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Possiamo concludere che:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scrivere:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Indicando con s la somma e con p il prodotto, tale relazione si può scrivere

$$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$$

Per scomporre un trinomio di II grado bisogna cercare due numeri che sommati diano il coefficiente del monomio di I grado (o secondo coefficiente) e moltiplicati il termine noto.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Esempio**Scomporre il trinomio x^2-5x+6** Dobbiamo cercare due numeri tali che $s=-5$ e $p=6$. I due numeri sono $a=-2$ e $b=-3$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Massimo Comune Divisore e Minimo Comune Multiplo di Polinomi

Dati due o più polinomi si può calcolare il loro M.C.D. e il loro m.c.m. applicando lo stesso procedimento introdotto negli insiemi numerici.

Massimo Comune Divisore**Dati due o più polinomi, per calcolare il M.C.D. si deve:**

- **scomporre i polinomi in fattori primi**
- **prendere i fattori comuni con il minimo esponente, una sola volta**

Esempio**Calcolare il M.C.D. tra x^2-2x ; x^2-4x+4 ; x^3-2x^2**

Scomponiamo i polinomi in fattori primi:

$$x^2-2x=x(x-2); \quad x^2-4x+4=(x-2)^2; \quad x^3-2x^2=x^2(x-2)$$

Calcoliamo il massimo comun divisore prendendo i fattori comuni con il minimo esponente

$$\text{M.C.D.}(x^2-2x; x^2-4x+4; x^3-2x^2)=x(x-2)$$

Minimo comune multiplo**Dati due o più polinomi Per calcolare il m.c.m. si scompongono i polinomi in fattori primi e si prendono i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente, presi una sola volta**

Esempio**Calcolare il m.c.m. tra x^2-2x ; x^2-4x+4 ; x^3-2x^2**

Scomponiamo i polinomi in fattori primi:

$$x^2-2x=x(x-2); \quad x^2-4x+4=(x-2)^2; \quad x^3-2x^2=x^2(x-2)$$

Calcoliamo il minimo comun multiplo prendendo i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente

$$\text{m.c.m.}(x^2-2x; x^2-4x+4; x^3-2x^2)=x^2(x-2)^2$$

HAI IMPARATO CHE ...

1. Scomporre un polinomio in fattori primi vuol dire ridurlo in un prodotto di fattori primi e primi tra loro.
2. Per scomporre un polinomio in fattori primi devi conoscere
 - metodo del raccoglimento a fattore comune;
 - metodo del raccoglimento a fattore parziale;
 - la differenza di due quadrati;
 - il trinomio particolare quadrato di un binomio
 - il quadrato di un polinomio
 - il cubo di un binomio
 - la somma e la differenza di due cubi
 - la scomposizione di un trinomio di II grado

DIVISIONE TRA POLINOMI

PREREQUISITI

Conoscere il calcolo algebrico

OBIETTIVI

Sapere

Conoscere la divisione tra due polinomi

Conoscere il Teorema di Ruffini

Conoscere la regola di Ruffini

Saper Fare

Saper dividere due polinomi

Saper determinare il resto di una divisione tra un polinomio e un binomio

Saper applicare la regola di Ruffini

Saper scomporre un polinomio utilizzando il teorema di Ruffini

Divisione tra polinomi

Introduzione

Per semplicità parleremo di polinomi ad una variabile ma, tutte le proprietà valgono anche per polinomi a più variabili.

Definizione

Dati i polinomi $A(x)$ e $B(x)$, si dice che $A(x)$ è divisibile per $B(x)$ se, esiste un terzo polinomio $C(x)$ che moltiplicato per $B(x)$ dà $A(x)$.

$$A(x) = C(x) \cdot B(x)$$

Esempio

Il polinomio x^2-4 è divisibile per $x-2$ perché sappiamo che:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

Divisione tra polinomi

Dati due polinomi $A(x)$ di grado m e $B(x)$ di grado n , ordinati secondo le potenze decrescenti di x e con $m \geq n$.

Si dimostra che la divisione $A(x):B(x)$ determina due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tale che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

$Q(x)$ è il quoziente della divisione e $R(x)$ è il resto.

Il grado di $R(x)$ deve essere minore del grado del divisore $B(x)$.

Se $R(x) = 0$ allora la divisione è esatta cioè, $A(x)$ è divisibile per $B(x)$.

Riassumendo

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ R(x) & Q(x) \end{array} \Leftrightarrow A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ con } \begin{cases} \text{grad}A(x) \geq \text{grad}B(x) \\ \text{grad}R(x) < \text{grad}B(x) \end{cases}$$

Vediamo ora, con un esempio come si procede per determinare il quoziente e il resto di una divisione.

Esempio

Dividere i seguenti polinomi $(x^3 - 2x^2 + x - 2): (x^2 - 3x + 1)$.

Disponiamo i due polinomi secondo il seguente schema:

$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - 3x + 1 \\ \hline x \end{array}$	<p>Dividiamo il termine di grado massimo del dividendo per il termine di grado massimo del divisore e scriviamo il quoziente sotto la riga del divisore.</p>
$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ -x^3 + 3x^2 - x \\ \hline x^2 - 3x + 1 \\ \hline x \end{array}$	<p>Moltiplichiamo il quoziente per il divisore e scriviamo il prodotto, cambiato di segno, sotto il dividendo.</p>
$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ -x^3 + 3x^2 - x \\ \hline x^2 - 2 \\ \hline x^2 - 3x + 1 \\ \hline x \end{array}$	<p>Sommiamo i due polinomi e otteniamo il resto parziale.</p>
$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ -x^3 + 3x^2 - x \\ \hline x^2 - 2 \\ \hline x^2 - 3x + 1 \\ \hline x + 1 \end{array}$	<p>Il resto ha lo stesso grado del divisore, possiamo continuare la divisione. Il resto è detto parziale. Ripetiamo il procedimento dividendo il resto parziale per il divisore</p>
$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ -x^3 + 3x^2 - x \\ \hline x^2 - 2 \\ -x^2 + 3x - 1 \\ \hline 3x - 3 \end{array}$	<p>Moltiplichiamo il quoziente per il divisore e il prodotto ottenuto, cambiato di segno, lo trascriviamo sotto il dividendo. Procediamo poi alla somma tra i due polinomi. La divisione è terminata perché, il resto ha grado inferiore di quello del divisore. Il risultato è: $Q(x) = x + 1 ; R(x) = 3x - 3$, cioè $(x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x + 1)(x^2 - 3x + 1) + (3x - 3)$ Tale relazione ci permette di verificare l' esattezza della divisione.</p>

Riassumendo

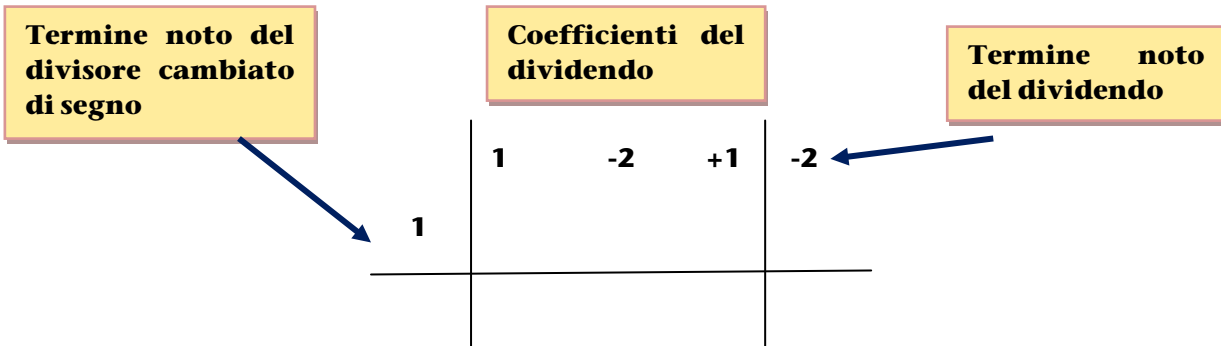
Per dividere un polinomio A(x) per un polinomio B(x):

- Si deve ordinare in ordine decrescente sia il polinomio dividendo che il polinomio divisore e se manca un termine nel dividendo bisogna inserire lo zero
- Si divide il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore
- Si moltiplica il quoziente ottenuto per ogni termine del divisore e, dopo aver cambiato di segno, sommarlo al dividendo.
- Se il resto parziale ha il grado maggior o uguale a quello del divisore diventa il nuovo dividendo e si ricomincia dal punto 2.
- Se il resto parziale ha grado inferiore a quello del divisore, la divisione è terminata

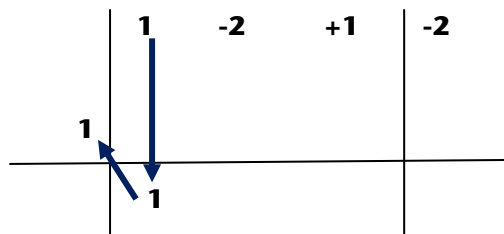
Regola di Ruffini

Dato il polinomio $A(x)$ di grado m e il binomio di I grado $B(x) = x - a$, per determinare il quoziente e il resto della divisione tra $A(x)$ e il binomio si utilizza una procedura più semplice detta **Regola di Ruffini**.

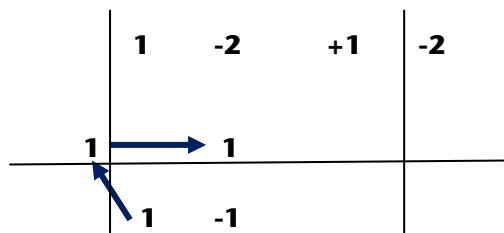
Sia data la divisione $(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x - 1)$. Per svolgerla utilizziamo il seguente schema:



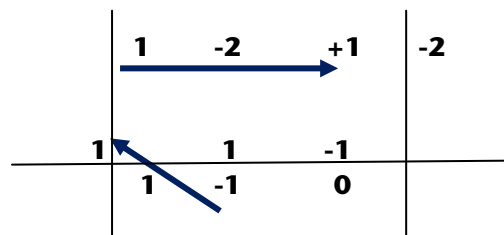
Si abbassa il primo termine dei coefficienti del dividendo, cioè 1, e si moltiplica per il termine noto del divisore, 1.



Il risultato ottenuto 1 si scrive sotto il secondo coefficiente del dividendo (-2) e si sommano, scrivendo il risultato sotto la linea orizzontale (-1).



La somma ottenuta si moltiplica per il termine noto del divisore e si scrive il prodotto sotto il terzo coefficiente del dividendo e si sommano.



La somma ottenuta si moltiplica per il termine noto del divisore e si scrive sotto il termine noto del dividendo e si sommano.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & +1 & -2 \\
 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 & -2
 \end{array}$$

Abbiamo terminato la divisione. I coefficienti del quoziente sono 1, -1, 0 e il resto è -2.

Il grado del quoziente è di un grado in meno rispetto a quello del divisore, quindi possiamo scrivere: $Q(x) = x^2 - x$ e $R = -2$

Esempio

Dividere $(x^3 + 4x^2 - 2x - 2) : (x - 2)$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & -2 & -2 \\
 2 & 2 & 2 & 12 & 20 \\
 \hline
 & & 1 & 6 & 10 & 18
 \end{array}$$

Il quoziente è $Q(x) = x^2 + 6x + 10$ e il resto vale $R = 18$, quindi possiamo scrivere

$$(x^3 + 4x^2 - 2x - 2) = (x - 2)(x^2 + 6x + 10) + 18$$

Teorema del Resto

Teorema

Dati i polinomi $A(x)$ e un binomio $B(x) = (x - a)$, il resto della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$ è uguale al valore che assume $A(x)$, quando ad x si sostituisce il valore a , cioè il termine noto del divisore cambiato di segno.

$$R = A(a)$$

Dimostrazione

Per definizione di divisione detti $Q(x)$ e R il resto della divisione di $A(x)$ con $(x - a)$ si ha:

$$A(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Se sostituiamo ad x il termine noto del divisore cambiato di segno otteniamo:

$$A(a) = (a - a)Q(a) + R \rightarrow A(a) = R$$

Se un polinomio $A(x)$ è divisibile per il binomio $(x - a)$ il resto della divisione sarà zero, quindi

$$A(a) = 0$$

Possiamo enunciare il seguente teorema

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per il binomio $(x - a)$ è che il polinomio si annulli quando ad x si sostituisce il termine noto del divisore cambiato di segno.

Applicazioni del teorema del resto

Precedentemente abbiamo visto come si scompone una somma o differenza di cubi

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Possiamo quindi affermare che $(a + b)$ è divisore di $a^3 + b^3$ e $(a - b)$ è divisore di $a^3 - b^3$.

Questi prodotti notevoli rientrano nei casi più generali dei binomi del tipo $a^n \pm b^n$.

Utilizzando il teorema del resto si può determinare un criterio di divisibilità per tali binomi.

I caso)

n pari

Consideriamo il binomio $a^n + b^n$ e supponiamo che b sia il termine noto. Vogliamo verificare se tale binomio è divisibile per $(a + b)$ o per $(a - b)$.

Per il teorema del resto otteniamo:

$$P(-b) = (-b)^n + (b)^n = 2b^n \neq 0 \text{ il binomio non è divisibile per } (a + b)$$

$$P(b) = (b)^n + (b)^n = 2b^n \neq 0 \text{ il binomio non è divisibile per } (a - b)$$

Consideriamo il binomio $a^n - b^n$ e ripetiamo il ragionamento precedente

$$P(-b) = (-b)^n - (b)^n = b^n - b^n = 0 \text{ il binomio è divisibile per } (a + b)$$

$$P(b) = (b)^n - (b)^n = b^n - b^n = 0 \text{ il binomio è divisibile per } (a - b)$$

Conclusione

$a^n + b^n$ con n pari non è mai divisibile

$a^n - b^n$ con n pari è divisibile sia per la somma delle basi $(a + b)$, sia per la differenza delle basi $(a - b)$.

Il caso) **n dispari**

Consideriamo il binomio $a^n + b^n$ e supponiamo che b sia il termine noto. Vogliamo verificare se tale binomio è divisibile per $(a + b)$ o per $(a - b)$.

Per il teorema del resto otteniamo:

$$P(-b) = (-b)^n + (b)^n = -b^n + b^n = 0 \text{ il binomio è divisibile per } (a + b)$$

$$P(b) = (b)^n + (b)^n = 2b^n \neq 0 \text{ il binomio non è divisibile per } (a - b)$$

Consideriamo il binomio $a^n - b^n$ e ripetiamo il ragionamento precedente

$$P(-b) = (-b)^n - (b)^n = -b^n - b^n = -2b^n \neq 0 \text{ il binomio non è divisibile per } (a + b)$$

$$P(b) = (b)^n - (b)^n = b^n - b^n = 0 \text{ il binomio è divisibile per } (a - b)$$

Conclusione

$a^n + b^n$ con n dispari è divisibile per la somma delle basi $(a + b)$

$a^n - b^n$ con n dispari è divisibile per la differenza delle basi $(a - b)$

Esempio

Dopo aver individuato il divisore del seguente binomio $a^5 - 32$, svolgi la divisione.

Il binomio è una differenza di potenze di indice dispari quindi, è divisibile per la differenza delle basi $a - 2$.

Utilizzando la Regola di Ruffini dividiamo $a^5 - 32$ per $a - 2$

	1	0	0	0	0	-32
2	2	4	8	16	16	32
	1	2	4	8	16	0

Il quoziente è $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

Scomposizione di un polinomio con il teorema del resto e la regola di Ruffini

Per scomporre un polinomio utilizzando il teorema del resto e la regola di Ruffini, bisogna determinare il binomio divisore $(x - a)$ tale che si verifichi $A(a) = 0$.

I valori da ricercare vengono detti **radici** del polinomio.

Dato un polinomio $A(x)$ a coefficienti interi e con primo coefficiente uguale a 1, la ricerca degli eventuali divisori va fatta tra i divisori del termine noto, sia di segno positivo che negativo.

Esempio

Scomporre in fattori primi il seguente polinomio: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

I divisori del termine noto sono: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$

Applichiamo il teorema del resto e sostituiamo, a partire da 1, i divisori nel polinomio.

$P(1) = 1 + 2 - 5 - 6 = -8 \neq 0$ Il polinomio non si annulla quindi il binomio $(x - 1)$ non è divisore

$P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = -7 + 7 = 0$ Il polinomio è divisibile per il binomio $(x + 1)$

Applicando la regola di Ruffini dividiamo

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	1	-6	0

Il polinomio è scomposto in:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$$

Dato un polinomio $A(x)$ con primo coefficiente uguale diverso da 1, la ricerca degli eventuali divisori va fatta tra il rapporto dei divisori del termine noto e i divisori del primo coefficiente, sia di segno positivo che negativo.

Esempio

Scomporre in fattori primi il seguente polinomio: $6x^2 + x - 2$

I divisori del rapporto tra il termine noto e il primo coefficiente sono: $\pm \frac{1}{2}$; ± 1 ; $\pm \frac{1}{3}$; $\pm \frac{1}{6}$; $\pm \frac{2}{3}$

Applichiamo il teorema del resto e sostituiamo i divisori nel polinomio.

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = 0$ Il polinomio si annulla quindi il binomio $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ è divisore

Applicando la regola di Ruffini dividiamo

	6	1		-2
$\frac{1}{2}$		3		2
	6	4		0

Il polinomio è scomposto in:

$$6x^2 + x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(6x - 4) = \left(\frac{2x-1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (3x - 2) = (2x - 1)(3x - 2)$$

Rammenta

Se la somma dei coefficienti del polinomio è uguale a zero, allora il numero 1 è una radice del polinomio.

Se la somma dei coefficienti dei monomi di grado pari del polinomio è uguale alla somma dei coefficienti dei monomi di grado dispari, allora il numero -1 è una radice del polinomio.

HAI IMPARATO CHE ...

1. Dati due polinomi $A(x)$ di grado m e $B(x)$ di grado n , ordinati secondo le potenze decrescenti di x e con $m \geq n$. La divisione $A(x):B(x)$ determina due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tale che $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$.
2. Dati i polinomi $A(x)$ e un binomio $B(x) = (x - a)$, il resto della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$ è uguale al valore che assume $A(x)$, quando ad x si sostituisce il valore a , cioè il termine noto del divisore cambiato di segno. $R = A(a)$
3. Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per il binomio $(x - a)$ è che il polinomio si annulli quando ad x si sostituisce il termine noto del divisore cambiato di segno.
4. Dato un polinomio $A(x)$ a coefficienti interi e con primo coefficiente uguale a 1, la ricerca degli eventuali divisori va fatta tra i divisori del termine noto, sia di segno positivo che negativo.
5. Dato un polinomio $A(x)$ con primo coefficiente uguale diverso da 1, la ricerca degli eventuali divisori va fatta tra il rapporto dei divisori del termine noto e i divisori del primo coefficiente, sia di segno positivo che negativo

FRAZIONI ALGEBRICHE

PREREQUISITI

Conoscere le proprietà delle operazioni tra insiemi numerici
 Conoscere i prodotti notevoli
 Conoscere la scomposizione di un polinomio
 Saper operare con gli insiemi numerici
 Saper operare con monomi e polinomi
 Saper scomporre in fattori primi un polinomio

OBIETTIVI

Sapere

Saper definire una frazione algebrica
 Saper definire il campo di esistenza di una frazione algebrica
 Saper riconoscere quando una frazione algebrica è riducibile

Saper Fare

Saper definire una frazione algebrica
 Saper definire il campo di esistenza di una frazione algebrica
 Saper riconoscere una frazione algebrica
 Saper calcolare il campo di esistenza di una frazione algebrica
 Saper ridurre ai minimi termini una frazione algebrica
 Saper ridurre due o più frazioni algebriche allo stesso denominatore
 Saper aggiungere frazioni algebriche
 Saper sottrarre frazioni algebriche
 Saper moltiplicare due o più frazioni algebriche
 Saper dividere due frazioni algebriche
 Saper elevare a potenza una frazione algebrica
 Saper svolgere espressioni tra frazioni algebriche

Frazioni Algebriche

Introduzione

Osserviamo le seguenti espressioni algebriche

$$\frac{3x^2y^2}{2zt} ; \frac{2x^2 - 5xy^2 + y^3 - 1}{3y(x+4)} ; \frac{3x^2y^2 + 4x^3}{2} ; 5x^3y - 2x^2 + 3 ; \frac{5x^3y^5z}{2}$$

Come le possiamo definire?

$\frac{3x^2 y^2}{2zt}$	È una frazione avente al Numeratore e al Denominatore un monomio
$\frac{2x^2 - 5xy^2 + y^3 - 1}{3y(x+4)}$	È una frazione avente al Numeratore e al Denominatore un polinomio .
$\frac{3x^2 y^2 + 4x^3}{2}$	È una frazione avente come Denominatore un monomio di grado zero
$5x^3 y - 2x^2 + 3$	È un polinomio, ma rappresenta anche una frazione apparente. È una frazione avente come Denominatore il polinomio unità
$\frac{5x^3 y^5 z}{2}$	È un monomio, ma rappresenta anche una frazione apparente perché ha al denominatore un monomio di grado zero.

Possiamo affermare che:

Gli insiemi dei polinomi e dei monomi sono dei sottoinsiemi dell' insieme delle frazioni algebriche

Frazioni Algebriche

Definizione

Una frazione composta, al Numeratore e al Denominatore da polinomi e/o monomi e nella quale il polinomio al denominatore non è nullo, è detta **Frazione Algebrica.**

Particolarità

Se nelle parti letterali appare solo una variabile la Frazione Algebrica si può indicare genericamente

$$P(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \text{ con } B(x) \neq 0$$

Esempio

Sono frazioni algebriche ad una sola variabile

$$\frac{3x-1}{2x^2} \quad \frac{x^3 - 12x^2 + x - 4}{2x^2 + 3x}$$

Condizioni di esistenza di una frazione algebrica

La frazione, indica l'operazione di divisione tra **Numeratore** e **Denominatore** e, tale operazione è **impossibile quando il divisore è zero**.

Possiamo quindi dedurre che:

Per operare con le frazioni algebriche bisogna avere la certezza che esistano sempre, qualsiasi sia il valore che attribuiamo alle lettere che appaiono al denominatore.

Per avere questa certezza dobbiamo cercare se:

1. esistono valori che annullano il denominatore;
2. se esistono, dobbiamo escluderli

Esempio

$$\frac{2x^2 - 3x}{2} \rightarrow \text{Esiste sempre;}$$

$$\frac{3x^2y - 3xy^3}{2x+7} \rightarrow \text{Esiste per } x \neq -\frac{7}{2}$$

$$\frac{2x^2}{3yt^3} \rightarrow \text{Esiste per } y \neq 0; \quad t \neq 0;$$

Vediamo ora, come si può determinare il campo di esistenza di una frazione algebrica.

Esempio

Consideriamo la seguente frazione algebrica $\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x-5)(x+2)}$

Il denominatore è **scomposto** ed è $(x-5)(x+2)$.

Applicando la legge di annullamento di un prodotto il denominatore si annulla se $(x-5) = 0 \wedge (x+2) = 0$

$$(x-5)=0 \text{ se } x=+5$$

Una somma algebrica è zero quando i due addendi sono opposti

$$(x+2)=0 \text{ se } x=-2$$

La frazione algebrica $\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x-5)(x+2)}$ ammette come **Campo di esistenza** $x \neq -2 \wedge x \neq +5$

Se la frazione algebrica ha il denominatore non ridotto in fattori primi, come possiamo procedere alla determinazione dei valori che lo annullano?

Esempio

Consideriamo la seguente frazione algebrica $\frac{4x^3 + 2x + 3}{x^2 - 9}$

Il denominatore è $x^2 - 9$. Scomponiamo il denominatore in fattori primi $(x-3)(x+3)$. I valori che annullano il denominatore sono $x = -3 \wedge x = 3$. La frazione esiste per $x \neq -3 \wedge x \neq 3$

Riepilogo

Per calcolare il campo di esistenza di una frazione algebrica si deve procedere nel seguente modo:

- Verificare se il denominatore è scomposto in fattori primi
- Se non è scomposto in fattori primi si procede alla scomposizione
- Si considerano i singoli fattori e si calcola per quale valore della lettera si annullano
- Si escludono tali valori ottenendo il campo di esistenza della frazione considerata

Riduzione ai minimi termini di una Frazione Algebrica

Saprai sicuramente come si riduce ai minimi termini una frazione ma, ti domanderai:

“come si procederà se devo semplificare una frazione algebrica dove al numeratore e al denominatore appaiono dei polinomi?”

Proviamo a dedurre insieme i passi da fare per semplificare, quando è possibile, una frazione algebrica.

Esempio

$\frac{x^2(x+2)(x-3)^2}{2x(x+2)(x-3)}$ La frazione algebrica non è ridotta ai minimi termini. Al numeratore e al

denominatore ci sono dei fattori comuni. I fattori sono:

1. x
2. $x+2$
3. $x-3$

Calcoliamo, prima di tutto, il campo di esistenza: $x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3$

Applichiamo il **Principio di Equivalenza** delle frazioni e, avendo la certezza che il divisore è diverso da zero, divido Numeratore e Denominatore per questi fattori e ottengo

$$\frac{\cancel{x^2}(\cancel{x+2})(\cancel{x-3})^2}{2x(\cancel{x+2})(\cancel{x-3})} = \frac{x(x-3)}{2}$$

La frazione è **ridotta ai minimi termini**, infatti il Numeratore e il Denominatore non hanno alcun divisore comune tranne l'unità, sono cioè primi tra loro.

La frazione ridotta è equivalente a quella data.

Definizione

Una frazione algebrica è ridotta ai minimi termini quando il Numeratore e il Denominatore sono primi tra loro.

Esempio

Semplificare la seguente frazione algebrica $\frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 + 3x - 28}$

Scomponiamo Numeratore e Denominatore in fattori primi.

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 + 3x - 28} = \frac{(x-5)(x+7)}{(x+7)(x-4)}$$

Il campo di esistenza è: $x \neq -7 \wedge x \neq 4$. Dividiamo Numeratore e Denominatore per $x + 7$

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 + 3x - 28} = \frac{(x-5)(x+7)}{(x+7)(x-4)} = \frac{x-5}{x-4} \quad \text{La frazione è ridotta}$$

Riepilogo

Per ridurre una frazione algebrica ai minimi termini bisogna fare i seguenti passi:

- Scomporre in fattori primi sia il Numeratore che il Denominatore, se non sono ridotti.
- Calcolare il campo di esistenza
- Dividere il Numeratore e il Denominatore per i divisori comuni.

Somma algebrica tra frazioni algebriche

Dobbiamo svolgere la seguente **somma algebrica** tra frazioni algebriche:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x^2 - y^2}$$

Come possiamo procedere? Proviamo a riprendere la somma algebrica tra frazioni numeriche e utilizziamo la medesima procedura.

Per sommare tra loro più frazioni bisogna:

- Calcolare il minimo comune denominatore;
- Trasformare ogni addendo in una frazione equivalente a quella data, avente come denominatore il minimo comune denominatore trovato;
- Sommare tutti i numeratori mantenendo invariato il denominatore

Svolgiamo, adesso, la somma algebrica data seguendo la procedura indicata :

Esempio

Consideriamo $\frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x^2-y^2} =$

Scomponiamo i denominatori in fattori e calcoliamo il **minimo comune multiplo**

$$m.c.m. = (x+y)(x-y).$$

Riduciamo gli addendi a frazioni equivalenti aventi lo stesso denominatore

$$= \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} + \frac{2(x+y)}{(x-y)(x+y)} + -\frac{3}{(x-y)(x+y)} =$$

Sommiamo tra loro i numeratori e, lasciamo invariato il denominatore, per la proprietà distributiva della divisione rispetto ad una somma algebrica.

$$= \frac{x-y+2x+2y-3}{(x+y)(x-y)} = \frac{3x+y-3}{(x+y)(x-y)}$$

Sappiamo che dobbiamo sempre considerare le condizioni di esistenza di una frazione algebrica, per avere la certezza che il denominatore non diventi mai uguale a zero e la divisione diventi impossibile. Per tale motivo anche quando svolgiamo una sottrazione o addizione tra frazioni algebriche dobbiamo calcolare il campo di esistenza.

Esempio

Consideriamo:

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{2x}{(x-3)(x+2)} \quad m.c.m. = (x+2)(x-3)$$

Riduciamo gli addendi a frazioni equivalenti aventi lo stesso denominatore. Il Campo di esistenza

$$\text{è } x \neq -2 \wedge x \neq 3$$

$$\frac{2(x+2)}{(x-3)(x+2)} + \frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)} + -\frac{2x}{(x-3)(x+2)} =$$

Sommiamo tra loro i numeratori e, lasciamo invariato il denominatore

$$= \frac{2x+4+3x-9-2x}{(x-3)(x+2)} = \frac{3x-5}{(x-3)(x+2)}$$

Semplificazione di una frazione algebrica durante la somma algebrica

Data una somma algebrica, durante lo svolgimento puoi avere l'opportunità di semplificare una frazione algebrica. Vediamo insieme come:

Esempio

$$\frac{2(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b} = \frac{2(a-b)}{(a-b)(a+b)} + \frac{1}{a+b}$$

l'addendo $\frac{2(a-b)}{(a-b)(a+b)}$ è una frazione riducibile. Prima di procedere devi però calcolare il campo di esistenza.

C.E. $a \neq b \wedge a \neq -b$

$$\frac{2(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b} = \frac{2(a-b)}{(a-b)(a+b)} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+b} + \frac{1}{a+b}$$

Il risultato è

$$\frac{2(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b} = \frac{2(a-b)}{(a-b)(a+b)} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+b} + \frac{1}{a+b} = \frac{3}{a+b}$$

Rammenta

Per poter addizionare o sottrarre due o più frazioni algebriche devi anzi tutto leggere con attenzione il testo e poi procedere alla risoluzione, generalmente, nel seguente modo:

- Calcolare il minimo comune denominatore
- Calcolare il campo di esistenza
- Ridurre tutti gli addendi allo stesso denominatore
- Sommare i numeratori

La lettura attenta del testo di un qualunque esercizio prima del suo svolgimento è importante perché, come hai già visto, puoi incontrare dei casi particolari, come la possibilità di semplificare un addendo.

Moltiplicazione tra frazioni algebriche

Dobbiamo svolgere la seguente **moltiplicazione** $\frac{x(x+15)}{x^2(x-3)} \cdot \frac{x(x+3)(x-3)}{x(x+15)}$.

Sappiamo che per moltiplicare due o più frazioni numeriche si moltiplicano tra loro i numeratori e i denominatori. Successivamente, se il numeratore e il denominatore non sono primi tra loro, si semplifica la frazione ottenuta.

Utilizziamo, per analogia, lo stesso metodo risolutivo.

Moltiplichiamo tra loro i numeratori e i denominatori

$$\frac{x(x+15)}{x^2(x-3)} \cdot \frac{x(x+3)(x-3)}{x(x+15)} = \frac{x^2(x+15)(x+3)(x-3)}{x^3(x-3)(x+15)} = \text{Calcoliamo il campo di esistenza}$$

$$x \neq -15 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3$$

Semplifichiamo e determiniamo il risultato

$$\frac{\cancel{x^2}(x+15)(x+3)(\cancel{x-3})}{\cancel{x^3}(x-3)(x+15)} = \frac{x+3}{x}$$

Conclusione

Per moltiplicare tra loro più frazioni con il Numeratore e il Denominatore scomposti in fattori primi si procede:

- moltiplicando tra loro i numeratori e i denominatori;
- semplificando la frazione algebrica ottenuta, se il numeratore e il denominatore non sono primi tra loro.

L'operazione di moltiplicazione tra frazioni algebriche gode delle seguenti proprietà:

Proprietà Associativa	$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{(x-y)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x+y} =$ $\left(\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{(x-y)^2}{x} \right) \cdot \frac{x^2}{x+y} =$ $= \frac{x+y}{x-y} \cdot \left(\frac{(x-y)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x+y} \right) =$ $= x(x-y), x \neq 0 \wedge x \neq -y \wedge x \neq y$
Proprietà Commutativa	$\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a(a-b)}{2a(a+b)} = \frac{a(a-b)}{2a(a+b)} \cdot \frac{a+b}{a-b}$
Di ogni frazione, diversa da zero, esiste sempre la sua inversa	<p>$\frac{a+b}{a-b}$ la sua inversa è $\frac{a-b}{a+b}$.</p> <p>Il loro prodotto è sempre uguale all'unità.</p> $\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a+b}} \cdot \frac{\cancel{a+b}}{\cancel{a-b}} = 1$

Generalizzazione della moltiplicazione tra frazioni algebriche

Osserviamo la seguente moltiplicazione:

$$\frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 - 16} \cdot \frac{x - 4}{x^2 + 12x + 36}$$

I numeratori e i denominatori dei fattori non sono scomposti in fattori primi.
Prima di moltiplicare, dobbiamo procedere alla scomposizione in fattori primi.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 - 16} \cdot \frac{x - 4}{x^2 + 12x + 36} &= \frac{(x+4)(x+6)}{(x+4)(x-4)} \cdot \frac{x-4}{(x+6)^2} = \\ &= \frac{\cancel{(x+4)}\cancel{(x+6)}\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-4)}(x+6)^2} = \frac{1}{\cancel{(x+6)}} \quad x \neq -6 \wedge x \neq -4 \wedge x \neq 4 \end{aligned}$$

Conclusione

Per moltiplicare due frazioni algebriche si procede:

- Scomponendo in fattori primi il numeratore e il denominatore di ogni singola frazione;
- Moltiplicando tra loro i numeratori e i denominatori delle frazioni;
- Calcolando il campo di esistenza delle singole frazioni;
- Semplificando la frazione algebrica prodotta

Divisione tra frazioni algebriche

Dobbiamo svolgere la seguente **divisione** $\frac{(2x+1)(3x-2)}{2x} \div \frac{(3x-2)(x+1)}{x}$.

Sappiamo che per divider due frazioni numeriche si moltiplica il dividendo per l'inverso del divisore.

Utilizziamo, per analogia, lo stesso metodo risolutivo:

Moltiplichiamo il dividendo per l'inverso del divisore

$$\frac{(2x+1)(3x-2)}{2x} \div \frac{(3x-2)(x+1)}{x} = \frac{(2x+1)(3x-2)}{2x} \cdot \frac{x}{(3x-2)(x+1)}$$

Moltiplichiamo le due frazioni algebriche e otteniamo il risultato

$$= \frac{\cancel{(2x+1)}\cancel{(3x-2)}x}{2\cancel{x}\cancel{(3x-2)}(x+1)} = \frac{2x+1}{2(x+1)}$$

Conclusione

Per dividere tra loro due frazioni si procede:

- moltiplicando la frazione dividendo per l'inverso della frazione divisore;
- semplificando la frazione algebrica ottenuta, se il numeratore e il denominatore non sono primi tra loro.

Condizioni di esistenza

Sappiamo che in una divisione, il divisore non può essere **zero**. Quando svolgiamo una divisione tra due frazioni algebriche dobbiamo sempre rammentare questa condizione. Vediamo come procedere per avere la certezza che il divisore sia sempre un numero diverso da zero.

$\frac{x+5}{x+10} \div \frac{x+5}{x} =$	<p>Il divisore è $\frac{x+5}{x}$. E' diverso da zero per $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$.</p> <p>Le condizioni di esistenza delle frazioni sono $x \neq -10 \wedge x \neq 0$</p>
$\frac{x+5}{x+10} \cdot \frac{x}{x+5} =$ $x \neq -10 \wedge x \neq -5 \wedge x \neq 0$	Trasformo la divisione in moltiplicazione
$\frac{(x+5)x}{(x+10)(x+5)} = \frac{x}{x+10}$ $x \neq -10 \wedge x \neq -5 \wedge x \neq 0$	Svolgo la moltiplicazione

Conclusione

Assegnata una divisione tra due frazioni algebriche per svolgerla si procede:

- determinando il campo di esistenza delle singole frazioni ed escludendo il valore che annulla la frazione divisore
- moltiplicando dividendo per l'inverso del divisore
- svolgendo la moltiplicazione

Divisione tra più frazioni algebriche

Osserviamo la seguente divisione: $\frac{x+3}{x-5} \div \frac{(x-5)^2}{(x+3)(x+1)} \div \frac{(x+3)^2(x^2-1)}{(x-5)^2}$

Per la divisione **non vale la proprietà associativa**. Dobbiamo procedere secondo la priorità delle operazioni.

1) Dividiamo le prime due frazioni:

$$\frac{x+3}{x-5} \cdot \frac{(x+3)(x+1)}{(x-5)^2} \div \frac{(x+3)^2(x^2-1)}{(x-5)^2} = x \neq -3 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 5 \wedge x \neq 1$$

2) Il prodotto lo dividiamo per la terza frazione

$$= \frac{(x+3)^2(x+1)}{(x-5)^3} \cdot \frac{(x-5)^2}{(x+3)^2(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x-5)(x-1)}$$

Potenza di una frazione algebrica

Dobbiamo svolgere la seguente operazione $\left(\frac{4x-3}{3x}\right)^2$

Sappiamo che elevare a **potenza** un numero vuol dire moltiplicarlo per se stesso tante volte quanto indica l' esponente. Nel nostro caso otteniamo:

Moltiplichiamo $\frac{4x-3}{3x}$ per se stesso due volte	$\left(\frac{4x-3}{3x}\right)^2 = \frac{4x-3}{3x} \cdot \frac{4x-3}{3x}$
Svolgiamo la moltiplicazione tra le due frazioni algebriche,	$\frac{4x-3}{3x} \cdot \frac{4x-3}{3x} = \frac{(4x-3)^2}{(3x)^2}$
Il risultato dell' elevamento a potenza è	$\frac{(4x-3)^2}{(3x)^2} = \frac{16x^2 - 24x + 9}{9x^2}$

Conclusione

Per elevare a potenza una frazione algebrica si deve **elevare** sia il numeratore che il denominatore all' esponente dato.

Esempio

Svolgiamo la seguente potenza: $\left(\frac{x+y}{x-y} - 2\right)^2$

In questo caso prima di elevare a potenza dobbiamo svolgere la somma algebrica che si trova alla base. Vediamo insieme come procedere:

Svolgiamo la somma e calcoliamo le condizioni di esistenza

$$\left(\frac{x+y-2x+2y}{x-y}\right)^2 = \left(\frac{3y-x}{x-y}\right)^2 \quad x \neq y$$

$$\text{Eleviamo a potenza} \quad \left(\frac{3y-x}{x-y}\right)^2 = \frac{(3y-x)^2}{(x-y)^2} = \frac{9y^2 + x^2 - 6xy}{x^2 + y^2 - 2xy} \quad x \neq y$$

Conclusione

Se dobbiamo elevare a potenza una somma algebrica di frazioni, si procede nel seguente modo:

- Si svolge la somma algebrica
- Si calcolano le condizioni di esistenza
- Si eleva a potenza la frazione somma ottenuta

Esempio

Svolgere la seguente potenza $\left(\frac{(x+3)^2(x-2)(x+4)}{x(x+3)^2(x+4)}\right)^2$

Osserviamo la potenza che dobbiamo sviluppare

$$\left(\frac{(x+3)^2(x-2)(x+4)}{x(x+3)^2(x+4)}\right)^2$$

La base è una frazione da ridurre ai minimi termini. Vediamo insieme come procedere: Calcoliamo le condizioni di esistenza e poi semplifichiamo la frazione

$$x \neq -4 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 0 \left(\frac{\cancel{(x+3)^2}(x-2)\cancel{(x+4)}}{x\cancel{(x+3)^2}\cancel{(x+4)}}\right)^2 =$$

Eleviamo a potenza

$$= \left(\frac{(x-2)}{x}\right)^2 = \frac{(x-2)^2}{x^2} \quad x \neq -4 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 0$$

Conclusione

Se dobbiamo elevare a potenza una frazione non ridotta ai minimi termini, si procede nel seguente modo:

- Si calcolano le condizioni di esistenza
- Si semplifica la frazione
- Si eleva a potenza la frazione ottenuta

Riepilogo

Per elevare a potenza una frazione algebrica devi:

- **Elevare a potenza sia il numeratore che il denominatore**

Se alla base della potenza ci sono delle operazioni da svolgere devi:

- **Svolgere le operazioni alla base della potenza**
- **Ridurre ai minimi termini la frazione**
- **Elevare a potenza la frazione ottenuta**

Espressioni tra frazioni algebriche

Esempi

Svolgere la seguente espressione $\left(\frac{x+6}{x+6}-1\right) \div \left(\frac{x^2+3x}{x+2} \cdot \frac{x-1}{2}\right)$

Otteniamo

$$\left(\frac{\cancel{x+6}-1}{\cancel{x+6}}\right) \div \left(\frac{x^2+3x}{x+2} \cdot \frac{x-1}{2}\right) = (1-1) \div \left(\frac{x^2+3x}{x+2} \cdot \frac{x-1}{2}\right) = 0 \div \left(\frac{x^2+3x}{x+2} \cdot \frac{x-1}{2}\right) = 0$$

$$x \neq -6 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

In una divisione, se il divisore è zero allora il quoziente è zero. Infatti qualsiasi numero, diverso da zero, moltiplicato per zero da zero.

La risoluzione di un' espressione deve tener conto della priorità delle operazioni. In questo caso prima si deve svolgere la moltiplicazione e successivamente la somma.

$$\frac{2x-6}{x+3} - \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x} = \frac{2x-6}{x+3} - \frac{x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x(x-2)} = \frac{2x-6}{x+3} - \frac{(x+1)}{(x-2)} =$$

$$\frac{(2x-6)(x-2)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x^2-4x-6x+12-x^2-3x-x-3}{(x+3)(x-2)} =$$

$$\frac{x^2-14x+9}{(x+3)(x-2)} \quad x \neq -3 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2$$

HAI IMPARATO CHE ...

1. Una frazione composta, al Numeratore e al Denominatore da polinomi e/o monomi e nella quale il polinomio al denominatore non è nullo, è detta Frazione Algebrica.
2. Per operare con le frazioni algebriche bisogna avere la certezza che esistano sempre, qualsiasi sia il valore che attribuiamo alle lettere che appaiono al denominatore
3. Per ridurre una frazione algebrica ai minimi termini bisogna fare i seguenti passi:
Scomporre in fattori primi sia il Numeratore che il Denominatore, se non sono ridotti.
Calcolare il campo di esistenza
4. Per sommare o sottrarre tra loro più frazioni bisogna:
Calcolare il minimo comune denominatore; Trasformare ogni addendo in una frazione equivalente a quella data, avente come denominatore il minimo comune denominatore trovato; Sommare tutti i numeratori mantenendo invariato il denominatore
5. Per moltiplicare due frazioni algebriche si procede:
Scomponendo in fattori primi il numeratore e il denominatore di ogni singola frazione;
Moltiplicando tra loro i numeratori e i denominatori delle frazioni;
6. Assegnata una divisione tra due frazioni algebriche per svolgerla si procede:
determinando il campo di esistenza delle singole frazioni ed escludendo il valore che annulla
la frazione divisore ; moltiplicando dividendo per l' inverso del divisore; svolgendo la moltiplicazione
7. Per elevare a potenza una frazione non ridotta ai minimi termini, si procede nel seguente modo:
 - Si calcolano le condizioni di esistenza
 - Si semplifica la frazione
 - Si eleva a potenza la frazione ottenuta.

Sezione 3. Le Equazioni Lineari

Identità

Equazioni e i principi di equivalenza

Equazioni I grado

IDENTITÀ

PREREQUISITI

Conoscere le proprietà dell'uguaglianza
Conoscere l'uguaglianza tra polinomi
Conoscere il calcolo letterale
Saper operare con il calcolo letterale

OBIETTIVI

Sapere

Saper riconoscere un'identità

Saper Fare

Saper svolgere un'identità

Identità

Introduzione

Un amico mi ha sfidato a risolvere il seguente problema:

“Ad un numero somma il suo quadruplo e uguaglialo al suo quintuplo. Trova il numero.”

Ho chiamato con x il numero che devo cercare e mi sono trovato a dover scegliere tra queste possibilità:

- a) $x + 4x = 5x$
- b) $x = 4x + 5x$
- c) $4x = 5x$

Dopo aver riflettuto, ho tradotto scegliendo la prima possibilità:

$$x + 4x = 5x$$

Quindi sommando i termini a primo membro ottengo

$$5x = 5x$$

Dopo aver letto con attenzione quanto ho trovato, rispondo:

“qualsiasi numero risolve il quesito”.

Ed era esatta!!!

Per risolvere il quesito l'ho trasformato in un'uguaglianza tra espressioni letterali ed ho ottenuto

$$5x = 5x$$

È un'uguaglianza tra due monomi uguali quindi, qualsiasi valore assegno alla x , ottengo sempre lo stesso numero.

Un'uguaglianza di questo tipo viene detta **Identità**.

Esempi

$$3x + 4 = 3x + 4$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = x\left(x + \frac{1}{2}\right) - 3$$

$$x(x - y) = x^2 - xy$$

Definizione

Si definisce **Identità** un'uguaglianza tra due espressioni algebriche, in una o più variabili, che è verificata per qualsiasi valore delle variabili.

$$A(x,y) = A(x,y)$$

L'espressione a sinistra dell'uguaglianza si chiama "**primo membro dell'uguaglianza**".

L'espressione a destra dell'uguaglianza si chiama "**secondo membro dell'uguaglianza**".

Condizioni di Esistenza di un'identità

Se esistono alcuni valori delle lettere, in uno o in entrambi membri, che fanno perdere di significato ad uno di essi (in particolare che annullano il denominatore), allora anche l'identità perde di significato.

In questi casi bisogna determinare il **campo di esistenza** (che si indica solitamente con C.E.).

Esempi

Considera l'uguaglianza $3x + y = \frac{y(3x + y)}{y}$

La frazione algebrica $\frac{y(3x + y)}{y}$ ha significato se $y \neq 0$, perché il denominatore di una frazione non può mai essere nullo.

Il C.E. è $y \neq 0$ e l'uguaglianza $3x + y = \frac{y(3x + y)}{y} \rightarrow 3x + y = 3x + y$ è un'identità.

Conclusione

Per verificare se un'uguaglianza tra frazioni algebriche è un'identità devi:

- ridurre le frazioni che appaiono ai due membri;
- calcolare il campo di esistenza;
- ottenere due frazioni algebriche uguali.

HAI IMPARATO CHE ...

1. Un'identità è un' uguaglianza tra due espressioni letterali ad una o due variabili, verificata per qualsiasi valore delle variabili

LE EQUAZIONI E I PRINCIPI DI EQUIVALENZA

PREREQUISITI

Conoscere le proprietà dell'uguaglianza
Conoscere l'uguaglianza tra polinomi
Conoscere il calcolo letterale
Saper operare con il calcolo letterale
Conoscere le identità

OBIETTIVI

Sapere

Saper distinguere identità e equazioni
Saper i principi di equivalenza
Saper riconoscere un'equazione determinata, indeterminata, impossibile
Saper riconoscere i vari tipi di equazioni

Saper Fare

Saper applicare i principi di equivalenza per risolvere equazioni

Equazioni

Introduzione

Un tuo amico ti ha posto il seguente quesito:

“ Trova un numero intero positivo tale che, il suo triplo sottratto di due sia uguale al suo doppio aumentato di tre.”

Chiama con x il numero che devi cercare e traduci il testo con un'uguaglianza tra espressioni algebriche, ottieni

$$3x - 2 = 2x + 3$$

che non è un'identità, quindi non è verificata per qualsiasi valore di x . Per trovare il numero che la rende vera puoi provare a sostituire valori alla x e calcolare i corrispondenti valori dei due membri dell'uguaglianza come nella tabella:

x	$3x - 2 = 2x + 3$
0	$-2 \neq 3$
1	$1 \neq 5$
2	$4 \neq 7$
3	$7 \neq 9$
4	$10 \neq 11$
5	$13 = 13$

Tuttavia, in generale, data un'uguaglianza tra due espressioni algebriche, determinare per tentativi il valore della variabile che la rende vera è spesso troppo lungo e laborioso.

Vedremo più avanti come si affronta in generale il problema con un metodo semplice e veloce, fin d'ora però diciamo che:

“esiste un solo valore che sostituito alla variabile rende vera l'uguaglianza”.

Tale tipo di uguaglianza viene chiamata **equazione**.

Definizione

Si definisce **equazione** un'uguaglianza tra due espressioni letterali, ad una o più variabili, verificata solo da particolari valori delle variabili.

Esempi

$$4x + 2 = 2x - 1$$

$$x^2 + 2 = 2x - 1$$

$$x + 2y = 2x - y$$

$$\frac{x+2}{x+3} = \frac{2x}{x-1}$$

Le variabili che appaiono nell'equazione si chiamano **Incognite**.

I particolari valori che assumono le incognite e rendono vera l'uguaglianza si chiamano **Soluzioni** o **Radici** dell'equazione.

Definizione

Un'equazione che ammette un numero finito di soluzioni si dice **Determinata**.

Esempio

Rispondi adesso al seguente quesito:

“Trova due numeri interi relativi tale che la loro differenza dia 8.”

Chiama con x e y i numeri che devi cercare e traduci il testo in un'uguaglianza tra due espressioni letterali, $x - y = 8$ con $x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}$

Non è un'identità, è un'equazione. Se provi a cercare la coppia di valori da assegnare ad x e y , procedendo per tentativi e costruendo ad esempio la tabella che segue, otterrai solo alcune delle possibili coppie di valori per x e y che rendono vera l'uguaglianza.

x	y	$x - y = 8$
0	-8	$8=8$
1	-7	$8=8$
2	-6	$8=8$
3	-5	$8=8$
.....	$8=8$
8	0	$8=8$
7	-1	$8=8$
.....	$8=8$

Le coppie di valori da assegnare sono infinite. Puoi quindi affermare che:

“L'equazione ammette infinite soluzioni”.

Definizione

Un'equazione si dice **Indeterminata** quando ammette infinite soluzioni.

Esempio

Rispondi adesso al seguente quesito:

“Trova un numero intero positivo tale che aggiungendogli 6 si ottenga 4”

Chiama con x il numero che devi cercare e traduci il testo in un'uguaglianza tra due espressioni letterali $x + 6 = 4$ con x appartenente a \mathbb{N} .

Si tratta di un'equazione e devi cercare il numero che sostituito alla variabile nel primo membro, dia come risultato 4.

Sapendo che la variabile deve essere un numero intero positivo, non esisterà nessun numero che sommato a sei dia come risultato 4.

Puoi quindi affermare che: “L'equazione non ammette soluzioni in \mathbb{N} ”.

Definizione

Un' equazione si dice **Impossibile** quando non ammette soluzioni.

Osservazione

L' equazione $x + 6 = 4$ con $x \in N$, nell' insieme dei numeri naturali è impossibile.

La medesima equazione $x + 6 = 4$ con $x \in Z$, nell' insieme dei numeri interi relativi, ammette la soluzione $x = -2$, ed è determinata.

Le soluzioni di un' equazione dipendono dall' insieme dei numeri a cui possono appartenere, ovvero all'insieme numerico in cui s'intende definita l'uguaglianza.

Tipi di equazione

Le equazioni si possono suddividere in:

- **Equazioni numeriche intere**, i coefficienti sono numerici e l' incognita appare solo al numeratore.

Esempio

$$\frac{3}{2}x - 1 = 2x + 5$$

- **Equazioni numeriche fratte**, i coefficienti sono numerici e la variabile appare anche al denominatore.

Esempio

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x}{3} + 5$$

- **Equazioni letterali intere**, i coefficienti sono parametri e l' incognita appare solo al numeratore.

Esempio

$$\frac{a}{2}x - 1 = 2bx - 5$$

- **Equazioni letterali fratte**, i coefficienti sono parametri e l' incognita appare anche al denominatore.

Esempio

$$\frac{x+a}{ax} = \frac{2bx-5}{x-a}$$

Riepilogo

Esistono diverse tipologie di uguaglianze tra espressioni letterali e possono essere:

Un' **Identità** che è verificata da qualsiasi valore attribuibile alle variabili.

Un' **Equazione** che è verificata solo da particolari valori attribuibili alle variabili, dette soluzioni.

Le equazioni si suddividono in:

1. **Equazioni numeriche intere**
2. **Equazioni numeriche fratte**
3. **Equazioni letterali intere**
4. **Equazioni letterali fratte**

Le equazioni si possono distinguere in:

- a. **Equazioni determinate**, che ammettono un numero finito di soluzioni.
- b. **Equazioni Impossibili**, che non ammettono alcuna soluzione.
- c. **Equazioni Indeterminate**, che ammettono infinite soluzioni.

Le soluzioni di un' equazione dipendono dall' insieme dei numeri a cui possono appartenere, ovvero all'insieme numerico in cui s'intende definita l'uguaglianza.

Principi di equivalenza

Esempio

1. Considera l' equazione:

$$4x-1=2x+5$$

Scegli tra i seguenti valori la soluzione dell' equazione: 6 ; 4; 2; 3

Sostituendo al posto della variabile x otteniamo:

$$4(6) - 1 = 2(6) + 5 \Rightarrow 23 \neq 17$$

$$4(4) - 1 = 2(4) + 5 \Rightarrow 15 \neq 13$$

$$4(2) - 1 = 2(2) + 5 \Rightarrow 7 \neq 9$$

$$4(3) - 1 = 2(3) + 5 \Rightarrow 11 = 11$$

La soluzione dell' equazione è $x=3$

2. Considera l' equazione:

$$4x-1=2x+5$$

Somma ad ambo i membri dell' equazione il numero 1, ottieni:

$$4x-1+1=2x+5+1 \rightarrow 4x=2x+6$$

Sottrai ad entrambi i membri $2x$, ottieni:

$$4x-2x=2x-2x+6 \rightarrow 2x=6$$

Dividi entrambi i membri per due, ottieni:

$$x=3$$

Osservazione 1

Data l' equazione: $4x-1=2x+5$, abbiamo sommato ad entrambi i membri 1 e sottratto $2x$, ottenendo

$2x=6$ che ammette la stessa soluzione di $4x-1=2x+5$, $x=3$

Definizione

Due equazioni si dicono equivalenti quando ammettono lo stesso insieme di soluzioni.

Generalizzazione

Data un'equazione possiamo sommare e sottrarre ad entrambi i membri una stessa quantità algebrica che si ottiene un'equazione avente le stesse soluzioni di quella data.

Abbiamo applicato il **Primo Principio di Equivalenza delle Equazioni**.

Definizione

Data un'equazione si può sommare o sottrarre, ad entrambi i membri, una medesima quantità algebrica diversa da zero, che si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Esempi

I. Considera l'equazione:

$$2x-3+2x=x+5+2x$$

Sottrai ad entrambi i membri $2x$

$$2x-3+2x-2x=x+5+2x-2x \quad \text{in entrambi i membri } 2x \text{ si annulla.}$$

$$2x-3=x+5$$

sottrai ad entrambi i membri x

$$2x-3-x=x-x+5 \quad \text{il termine } x \text{ al secondo membro viene spostato al primo membro ma cambiato di segno}$$

$$2x-x-3=5$$

somma ad entrambi i membri 3

$$x-3+3=+5+3 \quad \text{il termine noto } 3 \text{ viene spostato al secondo membro anch'esso cambiato di segno}$$

$$x=8$$

Conseguenze del primo principio di equivalenza

Un addendo si può spostare da un membro all'altro cambiandolo di segno.

Se in entrambi i membri di un'equazione esistono due termini uguali essi si annullano

Osservazione 2

Consideriamo l'equazione $2x=+6$. Dividiamo entrambi i membri per 2 , ottenendo $x=3$.

Generalizzazione

Abbiamo diviso entrambi i membri per una stessa quantità algebrica.
Abbiamo ottenuto un'equazione equivalente, anzi abbiamo trovato la **soluzione** dell'equazione.

Abbiamo applicato il **Secondo Principio di Equivalenza delle Equazioni**

Definizione

Data un'equazione si può moltiplicare o dividere, entrambi i membri per una medesima quantità algebrica, purché diversa da zero, ottenendo un'equazione equivalente a quella data.

Conclusione

Possiamo affermare che applicando i principi di equivalenza si determinano le **soluzioni di un'equazione**.

I principi di equivalenza servono, ad esempio, per poter determinare la soluzione di una equazione di I grado. Vediamo come:

$8x - 5 = 9x - 11$	Sommo ad entrambi i membri 5 e sottraggo $9x$
$8x - 5 + 5 - 9x = 9x - 11 + 5 - 9x$	Sommo i termini simili
$-x = -6$	Moltiplico per -1
$x = 6$	Soluzione dell'equazione

Esempi

Svolgiamo la seguente equazione:

$$13x - 8 = 9x - 10 \rightarrow 13x - 9x = +8 - 10 \rightarrow 4x = -2 \rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{-2}{4} \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Conclusione

In sintesi possiamo affermare che:

- Il **primo principio di equivalenza** permette di trasportare un addendo da un membro ad un altro *cambiandogli di segno*.
- Il **secondo principio di equivalenza** permette di dividere o moltiplicare entrambi i membri di un'equazione per una stessa quantità (diversa da zero) e, anche, di determinare la soluzione.

L'applicazione di tali principi permette di trasformare l'equazione assegnata in un'altra più semplice ma equivalente a quella data, avente cioè lo stesso insieme di soluzioni.

Tale procedura si ripete fino a quando non si arriva alla forma più semplice dell'equazione che mi dà la soluzione.

Il grado di un' equazione

Consideriamo le seguenti equazioni ridotte in forma normale (o forma canonica):

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$3x - 2 = 0$$

Sono dette in forma normale perché il polinomio che si trova al I membro è ridotto in forma normale.

Il grado delle equazioni dipende dal grado dei polinomi.

$x^2 - 3x + 2 = 0$ è un' equazione di II grado

$x^3 - 4x^2 - 2x - 10 = 0$ è un' equazione di III grado

$3x - 2 = 0$ è un' equazione di I grado

Il termine che appare in un' equazione senza l' incognita è detto **Termine Noto**.

Nell' equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ il termine noto è +2.

HAI IMPARATO CHE ...

1. Un' equazione un' uguaglianza tra due espressioni letterali, ad una o più variabili, verificata solo da particolari valori delle variabili.
2. Un' equazione che ammette un numero finito di soluzioni si dice Determinata
3. Un' equazione che ammette un numero infinito di soluzioni si dice Indeterminata
4. Un' equazione che non ammette alcuna soluzione si dice Impossibile
5. Due equazioni si dicono equivalenti se ammettono lo stesso insieme di soluzioni
6. Per risolvere un' equazione si applicano i due principi di equivalenza.
Primo principio
Data un' equazione si può sommare o sottrarre ad entrambi i membri una stessa quantità algebrica numerica o letterale che, si ottiene un' equazione equivalente a quella data.
Secondo principio
Data un' equazione si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri per una stessa quantità algebrica, purchè diversa da zero, che si ottiene un' equazione equivalente a quella data.
7. Le equazioni si suddividono in:
equazioni numeriche intere, equazioni numeriche fratte, equazioni letterali intere, equazioni letterali fratte.

LE EQUAZIONI DI I GRADO

PREREQUISITI

Conoscere le proprietà dell'uguaglianza
Conoscere l'uguaglianza tra polinomi
Conoscere il calcolo letterale
Saper operare con il calcolo letterale
Conoscere i principi di equivalenza delle equazioni

OBIETTIVI

Sapere

Riconoscere un'equazione numerica intera di I grado
Riconoscere un'equazione determinata, indeterminata, impossibile
Riconoscere un'equazione numerica fratta di I grado
Riconoscere un'equazione letterale intera di I grado
Riconoscere un'equazione letterale fratta di I grado

Saper Fare

Svolgere un'equazione numerica intera di I grado
Svolgere un'equazione numerica fratta di I grado
Svolgere un'equazione letterale intera di I grado
Svolgere un'equazione letterale fratta di I grado

Equazioni di I grado

Equazioni di I grado Numeriche Intere

Osserva queste equazioni:

$$3x + 1 = 0 \wedge \frac{3}{2}x - 1 = 2 + \frac{1}{3}x$$

I coefficienti sono numerici e al denominatore non appare la variabile.

Definizione

Un'equazione avente i coefficienti numerici e la variabile che, non appare al denominatore è detta **numerica intera**.

Esempi

Determina la soluzione dell'equazione $3x + 5 = x - 3$

Per risolvere l'equazione $3x + 5 = x - 3$ puoi

1. applicare il primo principio di equivalenza ottenendo: $3x + 5 - 5 - x = x - 3 - 5 - x$
2. Sommare i termini simili ottenendo $2x = -8$
3. applicare il secondo principio di equivalenza e troverai la soluzione $x = -4$

Rammenta

Utilizzando il primo principio di equivalenza puoi:

- spostare un addendo da un membro all'altro cambiandogli di segno
- sommare successivamente i termini simili

Al termine di questi passaggi si arriva sempre ad ottenere un'equazione equivalente a quella data, ma in una forma ridotta.

Ad es.

$$3x = 4; -2x = 5$$

Per determinare la soluzione dell'equazione applichi il secondo principio di equivalenza, dividendo entrambi i membri per il coefficiente della variabile.

$$x = \frac{4}{3} \text{ e } x = -\frac{5}{2}$$

Possiamo quindi affermare che:

Definizione

L'equazione

$$ax = b$$

rappresenta la forma normale di un'equazione di primo grado.

Tale equazione è **determinata ed ammette come soluzione $x = \frac{b}{a}$ se $a \neq 0$**

Equazioni di I grado Impossibili

Esempio

Determina la soluzione dell'equazione $2x + 8 = 2x - 5$

Per risolvere l'equazione $2x + 8 = 2x - 5$

sposta i monomi con la x al primo membro e i termini noti al secondo membro

$2x - 2x = -5 - 8$ somma e ottieni $0 = -13$

L'equazione non ammette soluzioni, è impossibile

Osservazione

Il coefficiente **a** è uguale a zero, mentre **b** è diverso da zero.

L'equazione non ammette soluzioni.

Possiamo quindi affermare che l'equazione:

Definizione

L'equazione:

$$ax = b$$

Se $a = 0$ (si annullano tutti i termini in x) e $b \neq 0$ assume la forma $0x = b$.

L'equazione è **impossibile, non ammette alcuna soluzione**

Equazioni di I grado Indeterminate

Esempio

Determina la soluzione dell'equazione: $3x + 5 = 3x + 5$

Per risolvere l'equazione:

$$3x + 5 = 3x + 5$$

sposta i monomi con la x al primo membro e i termini noti al secondo membro

$3x - 3x = +5 - 5$ somma e ottieni $0 = 0$.

Osservazione

Il coefficiente **a** è uguale a zero, e **b** è uguale a zero.

L'equazione ammette infinite soluzioni.

Possiamo quindi affermare che

Definizione

L'equazione:

$$ax = b$$

Se $a = 0$ (si annullano tutti i termini in x) e $b = 0$ assume la forma $0x = 0$

L'equazione si dice **indeterminata** ed ammette infinite soluzioni.

In sintesi

Un'equazione di primo grado ridotta alla forma normale

$$ax = b$$

può essere:

1. **Determinata** e ammette come soluzione $x = \frac{b}{a}$
2. Non determinata se $a = 0$ e abbiamo i seguenti casi
 - $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow 0x = 0$ **Indeterminata** e ammette infinite soluzioni.
 - $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow 0x = 0$ **Impossibile** e non ammette alcuna soluzione.

Equazioni Numeriche Fratte

Definizione

Un'equazione si definisce numerica fratta quando, i **coefficienti** della variabile e il termine noto sono **numerici**. Fratta perché la **variabile appare al denominatore**

Esempio

Svolgi l'equazione: $\frac{2x-1}{x} - \frac{3x}{2x-1} - \frac{x^2+3x+2}{x(2x-1)} = 0$

Calcola il denominatore comune e trovi $x(2x-1)$.

Riduci le frazioni allo stesso denominatore:

$$\frac{(2x-1)^2 - 3x^2 - x^2 - 3x - 2}{x(2x-1)} = 0$$

Determina le condizioni di esistenza. C.E. $x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$.

Elimina il denominatore comune svolgi i passaggi algebrici:

$$4x^2 + 1 - 4x - 3x^2 - x^2 - 3x - 2 = 0$$

L'equazione in forma normale è: $-7x = 1$.

La soluzione è $x = -\frac{1}{7}$.

In sintesi per svolgere un'equazione numerica fratta devi procedere nel seguente modo:

Calcolare il minimo comune denominatore.

Ridurre le frazioni allo stesso denominatore, trasformando ogni addendo in una frazione equivalente a quella data, avente come denominatore il minimo comune denominatore trovato.

Sommare tutti i numeratori mantenendo invariato il denominatore.

Calcolare le condizioni di esistenza.

Eliminare il denominatore.

Ridurre l'equazione alla forma normale $ax=b$.

Determinare la soluzione dell'equazione.

Equazioni Letterali Intere

Definizione

Un'equazione si definisce **letterale** quando, i coefficienti della variabile e il termine noto dipendono da lettere, dette **parametri**. **Intera** perché la variabile non appare al denominatore.

Esempio

Svolgi l'equazione: $2a(x+3)^2 - 3ax = a(x^2+2) + a(x-3)^2$

Devi ridurre l'equazione $2a(x+3)^2 - 3ax = a(x^2+2) + a(x-3)^2$ in forma normale

Svolgi i calcoli e ottieni:

$$2a(x^2 + 6x + 9) - 3ax = ax^2 + 2a + a(x^2 - 6x + 9)$$

$$2ax^2 + 12ax + 18a - 3ax = ax^2 + 2a + ax^2 - 6ax + 9a$$

La forma normale è: $15ax = -7a$.

Il coefficiente della variabile ($15a$) dipende dal **parametro** a .

Tale parametro può assumere qualsiasi valore numerico appartenente all'insieme dei **numeri razionali**, ma tra essi ne esiste uno che rende l'equazione non **determinata**.

Il valore è quello che annulla il coefficiente di x , nel nostro caso $15a$.

Dobbiamo quindi discutere l'equazione cioè, analizzare cosa succede quando $15a$ si annulla. Poniamo:

$15a=0 \rightarrow a=0$, sostituiamo al II membro e otteniamo **$0x=0$** , uguaglianza sempre vera.

L'equazione è pertanto indeterminata, ammette cioè infinite soluzioni.

Conclusione

Se $a \neq 0$ la soluzione è $x = -\frac{7}{15}$.

Se $a=0$ l'equazione è indeterminata.

In sintesi per svolgere un'equazione letterale intera devi procedere nel seguente modo:

Ridurre l'equazione alla forma normale $ax=b$.

Se il coefficiente della variabile dipende dal parametro, devi discutere per quali valori del parametro l'equazione è determinata, indeterminata o impossibile.

Equazioni Letterali Fratte**D**efinizione

Un'equazione si definisce **letterale** quando, i coefficienti della variabile e il termine noto dipendono da lettere, dette parametri. **Fratte** perché la variabile appare al denominatore.

Esempio

Svolgi l'equazione: $\frac{x-a}{x+a} - \frac{x+a}{x-a} = \frac{2ax-a+2}{x^2-a^2}$

Il denominatore comune è $(x+a)(x-a)$.

In questa equazione letterale fratta il parametro appare anche al denominatore. Le condizioni di esistenza sono: $x \neq -a \wedge x \neq +a$.

L'equazione in forma normale è:

$$6ax = a - 2$$

Il coefficiente della variabile dipende dal parametro, dobbiamo verificare cosa succede alla equazione quando tale coefficiente si annulla.

Discussione

Se $a=0$ l'equazione si riduce a $0 = -2$ ed è **impossibile**, infatti quest'ultima uguaglianza è assurda.

$$\text{Se } a \neq 0 \wedge x \neq -a \wedge x \neq a \Rightarrow x = \frac{a-2}{6a}$$

Osservando le condizioni di esistenza devi verificare se esiste un valore del parametro a che fa coincidere la soluzione trovata con il valore del campo di esistenza della variabile. Poni:

$$\frac{a-2}{6a} = a \Rightarrow 6a^2 - a + 2 = 0 \text{ ottieni un trinomio che non può essere in alcun modo scomposto,}$$

questo significa che la soluzione trovata non potrà mai essere uguale ad a .

Ponendo $\frac{a-2}{6a} = -a \Rightarrow 6a^2 + a - 2 = 0$. Il trinomio può essere scomposto nel seguente modo:

$6\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{2}{3}\right) = 0$ le cui soluzioni sono: $a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{2}{3}$ sostituendo questi valori l'equazione perde di significato perché la soluzione coincide con il valore della variabile del campo di esistenza.

Conclusione

$a = 0 \Rightarrow$ impossibile

$a = \frac{1}{2} \wedge a = -\frac{2}{3} \Rightarrow$ l'equazione perde di significato

$a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{2} \wedge a \neq -\frac{2}{3} \wedge x \neq -a \wedge x \neq +a \Rightarrow x = \frac{a+2}{6a}$ l'equazione è determinata

In sintesi per svolgere un'equazione letterale fratta devi procedere nel seguente modo:

- Calcolare il denominatore comune.
- Ridurre le frazioni allo stesso denominatore.
- Calcolare le condizioni di esistenza della variabile e del parametro.
- Eliminare il denominatore.
- Ridurre l'equazione alla forma normale $ax=b$.
- **Discutere** i coefficienti della variabile, se dipendono da un **parametro**.
- Determinare la soluzione dell'equazione.
- Verificare che la soluzione trovata non coincida con uno dei valori del campo di esistenza. In tal caso non sarebbe accettabile.

Equazioni di grado superiore al primo

Esempio

Svolgi l'equazione di secondo grado: $x^2 - 16 = 0$

L'equazione $x^2 - 16 = 0$ è di secondo grado.

Il secondo membro è una differenza di quadrati.

Scomponi in fattori il polinomio:

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

Per la **legge di annullamento di un prodotto** puoi porre ogni fattore uguale a zero:

$$x - 4 = 0 \wedge x + 4 = 0$$

Le soluzioni sono: $x = -4 \wedge x = 4$

Conclusione

Un'equazione di grado superiore può essere ricondotta alla soluzione di più equazioni di primo grado, se il polinomio che appare al primo membro è scomponibile in fattori di primo grado.

Per svolgerla bisogna:

Scomporre il polinomio in fattori primi di primo grado.

Porre ogni fattore uguale a zero.

Svolgere le equazioni di primo grado ottenute.

HAI IMPARATO CHE ...

8. Un' equazione un' uguaglianza tra due espressioni letterali, ad una o più variabili, verificata solo da particolari valori delle variabili.
9. Un' equazione che ammette un numero finito di soluzioni si dice Determinata
10. Un' equazione che ammette un numero infinito di soluzioni si dice Indeterminata
11. Un' equazione che non ammette alcuna soluzione si dice Impossibile
12. Due equazioni si dicono equivalenti se ammettono lo stesso insieme di soluzioni
13. Per risolvere un' equazione si applicano i due principi di equivalenza.
Primo principio
Data un' equazione si può sommare o sottrarre ad entrambi i membri una stessa quantità algebrica numerica o letterale che, si ottiene un' equazione equivalente a quella data.
Secondo principio
Data un' equazione si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri per una stessa quantità algebrica, purchè diversa da zero, che si ottiene un' equazione equivalente a quella data.
14. Le equazioni si suddividono in:
equazioni numeriche intere, equazioni numeriche fratte, equazioni letterali intere, equazioni letterali fratte.